

UNIVERSIDADE CATÓLICA PORTUGUESA

# Trabalho Final de Mestrado

---

O impacto das Crises Financeiras na Previsão da Estrutura  
Temporal das Taxas de Juro: o caso da Zona Euro

**Olga Sofia Oliveira Novais**

Sob a Orientação de:

Professor Doutor Pedro Duarte Sila

**Porto, 2012**

## AGRADECIMENTOS

O apoio de determinadas pessoas foi essencial para que este trabalho final de mestrado fosse possível, por isso, para mim, é fundamental destacá-las com os agradecimentos que a mesmas merecem de minha parte.

Gostaria de agradecer ao meu orientador Pedro Duarte Silva por toda a ajuda que me prestou ao longo do trabalho, pelas ideias e sugestões de melhoria, por se ter demonstrado sempre disponível e recetível em receber-me e apoiar-me com grande entusiasmo e, acima de tudo, agradeço-lhe a ele, e à Universidade Católica Portuguesa, pela oportunidade, do qual tanto me orgulho, de ter aprendido e desenvolvido competências junto de um Professor de mérito. Agradeço, também, ao Professor Ricardo Cruz por ter disponibilizado parte da base de dados e pelas sugestões que permitiram melhorar a qualidade do nosso trabalho e dos resultados obtidos.

Agradeço aos meus colegas de mestrado, Rafael Certal, Lara Pinheiro e Nuno Medeiros por toda a ajuda mútua, pelas horas de trabalho intenso e pela motivação que partilhamos ao longo deste percurso académico. Sempre acreditei que aprendemos e crescemos entre os melhores, nós somos a prova disso.

Um agradecimento especial, para todos os meus amigos, em particular ao Fábio Tavares, à Célia Santos, à Marina Bessa e à Samanta Vasconcelos, por toda a amizade inquestionável, apoio, motivação, entusiasmo e carinho que me deram, pelas opiniões, pela força e pela confiança que depositam no meu desempenho mesmo quando eu pensava não ser capaz.

Gostaria de agradecer ao Paulo Rocha por se ter deixado envolver neste trabalho, mesmo sabendo a complexidade que o tema exige, por me ter ajudado técnica e emocionalmente, por me ter motivado e apoiado ao longo destes 5 anos académicos que passamos juntos. Um sincero obrigado.

Por fim, agradeço aos meus pais, a quem dedico este trabalho. Agradeço-lhes pelo esforço que fizeram para que todos os meus sonhos se tornassem realidade e pelos princípios que me incumbiram. Eles foram o pilar para que este trabalho se tornasse uma realização pessoal e agradeço-lhes por terem depositado em mim toda a confiança, na certeza de que eu seria capaz de corresponder às suas expectativas.

## RESUMO

Na presente investigação são estudadas as diversas extensões do modelo de Nelson e Siegel (1987) com o propósito de analisar quais os modelos que revelam melhores resultados para ajustar e prever a Estrutura Temporal das Taxas de Juro na Zona Euro em contexto de grandes crises económicas e financeiras. Em particular, demonstramos que o modelo de 4 fatores, que inclui um segundo fator inclinação, é o modelo que melhor se ajusta às taxas de juro da amostra, revelando resultados bastante satisfatórios na medida em que consegue capturar as diversas formas que a *yield curve* assume ao longo do tempo, revelando resultados encorajadores mesmo em contextos de elevada instabilidade nos mercados quando comparado com os modelos de 2 e 3 fatores. Aplicamos, também, os modelos de Nelson e Siegel (1987) para efetuar previsões através de modelos autorregressivos para os seus parâmetros, tal como a literatura indica, e sugerimos um processo alternativo com a mesma finalidade que consiste em modelar diretamente as taxas de juro ajustadas pelos respetivos modelos. Chegamos à conclusão que a qualidade das previsões, geralmente, é superior quando utilizamos o método alternativo e que o modelo de 4 fatores continua a ser válido para efetuar previsões. No entanto, para esse efeito, o modelo de 4 fatores não revela resultados qualitativamente distintos do modelo de 3 fatores como quando avaliamos a sua capacidade para replicar as *yield curves* dentro da amostra. Por fim, aferimos que a presença de turbulência nos mercados piora significativamente as previsões das taxas de juro de curto prazo mas, regra geral, com o decorrer da maturidade e com o aumento dos desfasamentos para efeitos de previsão, o impacto de crises financeiras sobre a qualidade dos resultados tende a diminuir.

Palavras-chave: ETTJ, *yield curve*, taxas de juro, Nelson e Siegel, *subprime*, ajustamentos, previsões.

## ABSTRACT

In this research we are studying the various extensions to the Nelson e Siegel (1987) model in order to analyze the models which show better results to adjust and forecast the Term Structure of Interest Rates in the Euro Area in the context of major economic and financial crisis. In particular, we show that the 4 factors model, which includes a second slope factor, is the model that best suits the interest rates of the sample, showing satisfactory results in that it captures the various ways that the *yield curve* assumes over time, showing encouraging results even in environments of high market instability when compared with the 2 and 3 factors models. We apply also the Nelson e Siegel (1987) model to make forecasts using autoregressive models for their parameters, such as the literature indicates, and we suggest an alternative process for the same purpose which is directly modeling the interest rates adjusted for the respective models. We conclude that the quality of forecasts is generally higher when we use the alternative method and the 4 factors model remains valid for forecasting. However, for this purpose, the 4 factors model does not disclose qualitatively distinct results compared to the 3 factors model when evaluating its ability to replicate *yield curves* in-sample fit. Finally, we verified that the presence of market turbulence worsens significantly forecasts of interest rates of short term but, generally, over the maturity and with increasing lags for forecasting purposes, the impact of financial crisis on quality of results tends to decrease.

Keywords: Term structure of interest rate, yield curve, interest rate, Nelson and Siegel, subprime, adjustment, forecasting.

# ÍNDICE

Agradecimentos .....	iii
Resumo .....	iv
Abstract .....	v
Índice de Ilustrações .....	viii
Índice de Gráficos .....	ix
Índice de Tabelas .....	x
Lista de Acrónimos .....	xi
1 Introdução.....	1
2 Estrutura Temporal das Taxas de Juro.....	6
2.1 Enquadramento.....	6
2.2 Relação entre a curva das taxas <i>spot</i> , curva das taxas <i>forward</i> e a curva das taxas de desconto.....	7
3 Modelos de Construção e Previsão das Taxas de Juro a Termo.....	9
3.1 Modelos de não-arbitragem, de equilíbrio e estatísticos ou paramétricos .....	9
4 Modelos Paramétricos.....	12
4.1 Modelo Original de Nelson e Siegel (1987).....	12
4.2 Extensões do modelo de Nelson e Siegel (1987).....	14
4.2.1 Modelo de 2 fatores de Litterman e Scheinkman (1991).....	15
4.2.2 Modelo de 3 fatores de Bliss (1997).....	16
4.2.3 Modelo de 3 Fatores de Diebold e Li (2006) .....	17
4.2.4 Modelo de 4 fatores de Svensson (1994) .....	20
4.2.5 Modelo de 4 fatores de Svensson (1994) ajustado por Pooter (2007).....	21
4.2.6 Modelo de 4 Fatores de Björk e Christensen (1999) .....	22
4.2.7 Conclusões .....	23
5 Ajustamento e Previsão da <i>Yield Curve</i> na Zona Euro .....	25
5.1 Objetivos .....	25
5.2 Base de Dados .....	26

5.3	Estimação da classe de Modelos de Nelson e Siegel (1987) e Ajustamentos da <i>Yield Curve</i>	32
5.4	Modelização da Yield Curve: Antes e Após a Crise Financeira de 2007/08 .....	45
5.5	Previsão da Estrutura Temporal das Taxas de Juro .....	48
6	Conclusões e Desenvolvimentos Futuros.....	56
7	Referências Bibliográficas .....	60

## ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Ilustração 1. Decomposição do Modelo Nelson e Siegel (1987) com parâmetro de decaimento fixo igual a 3 .....	14
Ilustração 2. Estrutura a Termo das Taxas de Juro na Zona Euro .....	27

## ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1. Média e Desvio Padrão.....	29
Gráfico 2. Mediana, 1º e 3º Quartis .....	29
Gráfico 3. Coeficientes de determinação 25/01/1999-24/10/2011 .....	34
Gráfico 4. Coeficiente de determinação 2000:1 – 2002:12.....	36
Gráfico 5. Coeficientes de determinação 2006:1 – 2009:12 .....	37
Gráfico 6. Coeficientes de determinação 2010:1 – 24/10/2011 .....	38
Gráfico 7. Yield curve média das TJ reais Vs. Yield curve média do modelo de 2 Fatores.....	40
Gráfico 8. Yield curve média das TJ reais Vs. Yield curve média do modelo de 3 Fatores.....	40
Gráfico 9. Yield curve média das TJ reais Vs. Yield curve média do modelo de 4 Fatores.....	40
Gráfico 10. Yield Curve com Melhor Ajustamento – Modelo de 2 fatores (18/02/2000) .....	41
Gráfico 11. Yield Curve com Melhor Ajustamento – Modelo de 3 fatores (14/02/2000) .....	42
Gráfico 12. Yield Curve com Melhor Ajustamento – Modelo de 4 fatores (01/06/2000) .....	42
Gráfico 13. Yield Curve com pior Ajustamento – Modelo de 2 fatores (02/01/2008)...	42
Gráfico 14. Yield Curve com pior Ajustamento – Modelo de 3 fatores (14/11/2007)...	43
Gráfico 15. Yield Curve com pior Ajustamento – Modelo de 4 fatores (14/11/2007)...	43
Gráfico 16. Distribuição dos $R^2 \leq 0,8$ - Modelo de 2 fatores.....	44
Gráfico 17. Distribuição dos $R^2 \leq 0,8$ - Modelo de 3 fatores.....	44
Gráfico 18. Distribuição dos $R^2 \leq 0,8$ - Modelo de 4 fatores.....	45
Gráfico 19. Yield Curve média – Antes da Crise do <i>Subprime</i> .....	46
Gráfico 20. Yield Curve média – Após a Crise do <i>Subprime</i> .....	47

## ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1. Estatísticas Descritivas - <i>yield curves</i> .....	28
Tabela 2. Matriz de Correlação das <i>yield curves</i> .....	31
Tabela 3. Síntese dos Coeficientes de Regressão de Litterman e Scheinkam (1991) ....	32
Tabela 4. Síntese dos Coeficientes de Regressão de Diebold e Li (2006).....	32
Tabela 5. Síntese dos Coeficientes de Regressão de Björk e Christensen (1999).....	33
Tabela 6. Síntese dos Coeficientes de Determinação .....	33
Tabela 7. Racio (Número de R2/ Total das observações) (em %)......	33
Tabela 8. Peso dos coeficientes de determinação igual ou inferior a 0,80 no total da amostra por modelo.....	44
Tabela 9. Coeficientes de determinação (em %) – Antes da Crise do <i>subprime</i> .....	47
Tabela 10. Coeficientes de determinação (em %) – Após a Crise do <i>subprime</i> .....	47
Tabela 11. RMSE para previsões mensais - Coeficientes.....	50
Tabela 12. RMSE para previsões trimestrais - Coeficientes .....	51
Tabela 13. RMSE para previsões semestrais - Coeficientes .....	51
Tabela 14. RMSE para previsões anuais - Coeficientes .....	51
Tabela 15. RMSE para previsões mensais - TJ Ajustadas .....	53
Tabela 16. RMSE para previsões trimestrais - TJ Ajustadas .....	53
Tabela 17. RMSE para previsões semestrais - TJ Ajustadas .....	53
Tabela 18. RMSE para previsões anuais - TJ Ajustadas.....	54

## LISTA DE ACRÓNIMOS

**AR** – Autorregressivo

**BCE** – Banco Central Europeu;

**CV** – Coeficiente de Variação;

**DP** – Desvio Padrão;

**ETTJ** – Estrutura Temporal das Taxas de Juro;

**EURIBOR** - Euro Interbank Offered Rate

**ISDA** - *International Swaps and Derivatives Association*;

**MQO** – Mínimos Quadrados Ordinários;

**RMSE** – *Root Mean Square Error* (Erro quadrático médio);

**TJ** – Taxas de Juro;

**VAR** – Vetor Autorregressivo;

# 1 INTRODUÇÃO

No contexto de mercados financeiros, as taxas de juro (TJ) são o motor de decisão das operações e transações realizadas ou a realizar. Sem uma perspetiva das mesmas, não seria possível efetuar aplicações ou suprimentos suficientemente coerentes com as necessidades e interesses de cada agente económico. As TJ nos mercados monetários assumem um papel premente uma vez que, por um lado, os bancos centrais têm como objetivo primeiro manter o equilíbrio dos preços na economia, controlando os níveis de inflação através da condução do trajeto das TJ de curto prazo e, por outro lado, as TJ dos mercados de capitais são fortemente influenciadas pela evolução dos mercados monetários.

Os bancos centrais têm de cingir especial atenção à evolução das TJ e reter a informação que estas fornecem quanto às perspetivas de crescimento e desenvolvimento da atividade económica. Não menos importante, a previsão das TJ é crucial para a gestão de *portfolios* de obrigações e é importante, tanto para a avaliação de derivados, como para a gestão de risco (Diebold e Li 2006, p. 338).

Tal como (Diebold, Piazzesi e Rudebusch 2005, p. 1) referem:

*From a macroeconomic perspective, the short-term interest rate is a policy instrument under the direct control of the central bank, which adjusts the rate to achieve its economic stabilization goals. From a finance perspective, the short rate is a fundamental building block for yields of other maturities, which are just risk-adjusted averages of expected future short rates.*

Assim, reforça-se a ideia quanto à importância de conhecer as TJ ao longo do tempo, como meio informativo e auxiliar nas decisões a serem tomadas, tentando, o quanto mais possível induzi-las a um ponto de equilíbrio entre as TJ dos mercados monetários (curto prazo) e dos mercados de capitais (médio e longo prazo).

Foi neste sentido que, nas últimas décadas, a investigação em torno do tema tem vindo a apresentar avanços significativos no que se refere a modelos de estimação e previsão da Estrutura Temporal das Taxas de Juro (ETTJ), sendo que este conceito, numa primeira abordagem, é entendido como:

“o espectro das TJ que igualam o valor atual de um conjunto de obrigações de cupão zero aos preços respetivos, contratados em mercados obrigacionistas, por hipótese, perfeitos, sendo que essas obrigações de cupão zero diferem entre si, *ceteris paribus*, precisamente, pelos prazos de reembolso”. (Alves 1996, p. 37)

Em que uma obrigação de cupão zero é entendida como uma obrigação que não paga juros, isto é, o seu rendimento resulta da diferença entre o valor de reembolso e o valor de aquisição.

Na literatura encontramos diversas classes de modelos possíveis para efeito, os principais modelos desenvolvidos em torno da ETTJ estão divididos em três grandes classes distintas: modelos de não-arbitragem, modelos de equilíbrio e modelos estatísticos ou paramétricos. Os modelos de não-arbitragem partem do pressuposto de que a estrutura a termo não proporciona oportunidades de arbitragem, enquanto os modelos de equilíbrio exigem a formulação de um conjunto de suposições quanto às variáveis que representam as condições económicas em vigor num determinado momento de tempo e deduzem a ETTJ a partir dessas condições. No que se refere à modelização propriamente dita, os modelos de não-arbitragem pouco dizem sobre previsões e resultados dinâmicos, focando-se, essencialmente, na modelização da estrutura a termo num determinado momento temporal. Por outro lado, a literatura da estrutura a termo com modelos de equilíbrio é impulsionada pela dinâmica do curto prazo e está mais vinculada para previsões, no entanto a maioria dos trabalhos científicos desenvolvidos com modelos de equilíbrio focaram-se em ajustamentos<sup>1</sup> da ETTJ ao invés de previsões, em que os estudos que o fizeram revelaram resultados insatisfatórios<sup>2</sup>, (Diebold e Li 2006, p. 338).

Na presente investigação é estudado o modelo paramétrico de Nelson e Siegel (1987) e algumas das suas principais extensões. O modelo desenvolvido por Nelson e Siegel (1987) tornou-se bastante popular por entre os bancos centrais, comunidades académicas e na investigação científica uma vez que conseguiu capturar as diversas formas que a ETTJ podem assumir ao longo do tempo através de apenas três fatores.

---

<sup>1</sup> Exemplo de trabalhos científicos focados em modelos de equilíbrio focados para ajustamentos são os de Jong (2000) e Dai e Singleton (2000).

<sup>2</sup> Duffee (2002) apresenta previsões efetuadas com modelos de equilíbrio para *treasury bonds*, com maturidades entre os 3 meses e 10 anos, durante 1952 e 1994 e obtém resultados fracos.

Dada a popularidade deste modelo, vários foram os autores que apresentaram extensões e reformulações sobre o mesmo com o fim de procurar maior flexibilidade na estimação e qualidade nos resultados obtidos. Uma das reformulações com resultados mais satisfatórios foi o modelo proposto por Diebold e Li (2006). Este tornou-se um dos mais adotados por se revelar bastante parcimonioso e por apresentar resultados encorajadores nos ajustamentos e nas previsões das TJ. Este modelo é, também, frequentemente designado como modelo de fatores uma vez que, conseguiu capturar as diversas formas que a curva das TJ dos EUA assumiu em diferentes momentos do tempo, reinterpretando os fatores como nível, inclinação e curvatura.

Assim, o estudo que desenvolvemos procurou partir da literatura relevante em torno da ETTJ para avaliar as condições de aplicabilidade das extensões do modelo de Nelson e Siegel (1987) para o contexto do mercado Europeu.

Para efeito, após a apresentação teórica dos principais modelos desenvolvidos em torno do modelo original de Nelson e Siegel (1987), iremos efetuar a aplicação de três desses modelos para efetuar ajustamentos das TJ para a Zona Euro, um modelo de 2 fatores, um modelo de 3 e, por fim, um modelo de 4 fatores. O primeiro objetivo desta aplicação prática consiste em detetar o modelo que melhor se ajusta às TJ de referência do Euro e, posteriormente, averiguar, também, qual o modelo que se revela melhor para efeitos de previsão. Adicionalmente, procuramos determinar qual o modelo que apresenta melhores resultados para efeitos de previsão em períodos de crise e instabilidade nos mercados financeiros.

Assim, para efetuar os ajustamentos, obtivemos as estimativas dos fatores através de modelos de regressão linear ajustados pelo método dos Mínimos Quadrados Ordinários (MQO) aos fatores de cada um dos modelos que selecionamos. Concluimos que o modelo que melhor se ajusta às TJ da Zona Euro é o modelo de 4 fatores proposto por Björk e Christensen (1999). Este modelo é viável em períodos de estabilidade económica e financeira, no entanto, foram identificados períodos em que este falha claramente mas que, mesmo assim, consegue efetuar ajustamentos com boa qualidade quando comparado com os modelos de menos fatores. Os resultados considerados fracos correspondem a períodos marcados por crises financeiras com precedentes a nível global. A nossa amostra é constituída por observações históricas diárias desde a entrada em vigor da moeda única, incluindo, o período da grande crise financeira de

2008 – *Subprime*, bem como o início da atual crise da dívida soberana na Zona Euro e, incorporando, também, a crise tecnológica da bolha da internet. Verificamos que as TJ estimadas nos períodos de estabilidade económica e financeira apresentam ajustamentos fortes, revelando coeficientes de determinação em torno de 99%, no entanto, em períodos marcados por elevada volatilidade nos mercados, períodos de incerteza quanto aos desenvolvimentos futuros da economia, bem como períodos estigmatizados pelas sucessivas intervenções dos bancos centrais no mercado monetário, os ajustamentos perdem qualidade de forma significativa. No entanto, torna-se relevante salientar que, quando comparado com a qualidade dos ajustamentos dos modelos de 2 e 3 fatores, os resultados mais fracos produzidos pelo modelo Björk e Christensen (1999) são, significativamente mais encorajadores, não ultrapassando coeficientes de determinação inferiores a 50% ao invés dos outros modelos testados que apresentam, também em períodos de turbulência nos mercados, coeficientes de determinação muito próximos de 0%.

Após testarmos os modelos no que se refere á capacidade de ajustar a ETTJ e de aferirmos quanto à razoabilidade no modelo de 4 fatores, passamos a analisar a capacidade dos modelos para efeitos de previsão das TJ. Para tal, com base num processo univariado AR, efetuamos as previsões das TJ em dois procedimentos distintos. Num primeiro, efetuamos a previsão das TJ com base na previsão dos coeficientes de cada um dos modelos, tal como sugere a literatura, e, em seguida, sugerimos uma forma alternativa de prever as TJ, ou seja, procedemos à previsão das TJ ajustadas por cada um dos modelos, dinamizando assim as TJ ao invés dos coeficientes. Para ambos os métodos, fomos analisar o impacto de períodos turbulentos, em particular os presentes na crise financeira do *subprime*, na qualidade dos resultados obtidos.

Demonstramos, em primeiro lugar, que as previsões revelam resultados com melhor qualidade quando efetuadas com base nas TJ ajustadas e que as TJ com base na previsão dos coeficientes só revelam resultados satisfatórios para horizontes temporais curtos. Em segundo, concluímos, como seria de se esperar, que a presença de elevada instabilidade distorce os resultados, perdendo qualidade essencialmente nas previsões de TJ de curto prazo mas que o impacto da crise financeira tende a diminuir com o decorrer da maturidade e com o aumento da ordem de defasamentos. Por fim, chegamos à conclusão que o modelo de 4 fatores apesar de apresentar resultados de

ajustamentos com qualidade superior do que os restantes modelos, quando o aplicamos para efetuar as previsões com base na previsão das TJ ajustadas este produz resultados com boa qualidade mas bastante semelhante aos resultados obtidos através do modelo de 3 fatores.

Em síntese, o modelo de 4 fatores é o que revela ser mais consistente para efetuar ajustamentos para as TJ da Zona Euro quando assumimos períodos de maior certeza e confiança quanto ao desenvolvimento futuro económico e financeiro mas, naturalmente, perde qualidade em períodos de elevada volatilidade e de choques económicos. No entanto, a perda de qualidade, quando comparada com os restantes modelos testados é, claramente menor, em que os modelos de 2 e 3 fatores deixam de conseguir capturar as diversas formas que a ETTJ assumem ao longo do tempo enquanto o modelo de 4 fatores ainda consegue replicá-las. Para efeitos de previsão, o modelo de 4 fatores revela-se satisfatório quando aplicado ao processo de previsão das TJ ajustadas, revelando resultados coerentes essencialmente para previsões que não sejam afetadas pelas crises financeiras.

## 2 ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO

### 2.1 ENQUADRAMENTO

Na economia, existem diversas TJ que resultam do elevado número de entidades emitentes de títulos de dívida com diferentes características e também pelo facto de estas estarem associadas a títulos com prazos de maturidade distintos.

A relação incidente sobre diferentes prazos de maturidade denomina-se como ETTJ, muitas vezes entendida como *yield curve*.

De acordo com (Cox, et al.1985, p. 385) “*The term structure of interest rates measures the relationship among the yields on default-free securities that differ only in their term to maturity*”. A teoria e a prática financeira sugerem dois conceitos alternativos que refletem a ETTJ, estes são: a *yield-to-maturity* e a *zero-coupon yield curve*, ou a curva das taxas *spot*, (Smirnov, et al. 2006). A *yield-to-maturity* não é mais do que o que o próprio nome indica, a rendabilidade até ao prazo de vencimento de uma aplicação financeira, (Brealey 2007). Numa melhor interpretação, a *yield-to-maturity* é a TJ anual do retorno que um investidor obtém se comprar uma obrigação ao preço corrente, mantendo-a até à maturidade, (Santos 2010).

Uma vez que, como já tínhamos mencionado, uma obrigação de cupão-zero é designada por uma obrigação que paga ao investidor a diferença entre o valor de reembolso e o valor da aquisição, então a diferença entre a *yield-to-maturity* e a *zero-coupon rate curve* provem do efeito do cupão. “O *redemption yield*<sup>3</sup> depende, não só, das TJ *spot* e do termo da maturidade, mas também da dimensão do cupão. Em geral, duas obrigações com a mesma maturidade mas com diferentes cupões irão ter diferentes *redemption yields*” (Schaefer 1977, p. 60).

A forma mais comum de estimar a ETTJ é através das TJ *spot* ou das taxas de rendimento sobre obrigações de cupão-zero, de economias como a Alemanha e os EUA, por serem consideradas TJ sem risco de crédito. No entanto, quando analisamos a ETTJ através das obrigações de cupão-zero deparamos com o facto de estas não serem transacionadas para maturidades superiores a um ano, isto é, estas só são diretamente

---

<sup>3</sup> Segundo (Schaefer 1977) a *redemption yield* sobre uma obrigação é, naturalmente, a taxa interna do retorno ao longo da vida da obrigação;

observáveis através de Bilhetes de Tesouro, o que implica a impossibilidade de ter uma visão direta da estrutura a termo para maturidades de médio e longo prazo, (Svensson 1995). Assim, torna-se necessário recorrer a determinados métodos de aproximação na sua estimação, sendo esta a razão pelo qual quando procedemos à estimação teórica das curvas de TJ devermos recorrer a informações existentes nos mercados para várias maturidades sobre os preços, as *yields* e as maturidades de obrigações, que quando têm cupão este seja fixo, isto é, tendo em atenção que os títulos utilizados na estimação apenas se diferenciem quanto ao prazo de vencimento.

Para estimar a ETTJ, a literatura tem vindo a privilegiar a informação contida nas obrigações emitidas pelos governos uma vez que têm maior liquidez e são títulos com baixo risco de *default* para alguns países, como é o caso da dívida emitida pelos EUA e da Alemanha, ou até mesmo considerados como títulos sem risco de crédito. Segundo (Hull 2002, p. 93):

*Treasury rates are the interest rates applicable to borrowing by a government in its own currency. For example, U.S. Treasury rates are the rates at which the U.S. government can borrow in the U.S. dollars; (...) It is usually assumed that there is no chance that government will default on an obligation denominated in its own currency. For this reason, Treasury rates are often termed risk-free rates.*

Em suma, a ETTJ representa a evolução das TJ de curto prazo e das TJ de médio e longo prazo, em que as primeiras, como já tínhamos mencionado, são fortemente influenciadas pelas decisões provindas dos mercados monetários e as segundas estão orientadas para as expectativas dos agentes económicos quanto à eficiência das políticas económicas e monetárias em diferentes espectros do tempo.

## 2.2 RELAÇÃO ENTRE A CURVA DAS TAXAS *SPOT*, CURVA DAS TAXAS *FORWARD* E A CURVA DAS TAXAS DE DESCONTO

Existem três formas fundamentais para obter uma primeira aproximação da estrutura a termo das TJ, as formas equivalentes são designadas por: *spot rate curve*, *forward rate curve* e *discount curve* que assumem, entre si, uma relação estrita.

Para um melhor enquadramento, torna-se fundamental entender a relação existente entre estas, uma vez que estas representam três formas teóricas na construção da estrutura a termo das TJ.

Uma TJ *spot* corresponde aos juros devidos ou recebidos no futuro por detenção de um empréstimo ou aplicação financeira realizada hoje ( $t = 0$ ) para uma determinada maturidade ( $m$ ). Assim, a TJ *spot* para um determinado horizonte temporal pode ser entendida como a TJ implícita no preço de uma obrigação de cupão-zero com maturidade  $m$  e com valor de reembolso ao par igual a  $P_t(m)$ , em que a TJ *spot* implícita no preço desta obrigação é representada por  $y_t(m)$ . Deste modo, o fator de desconto será dado por:

$$P_t(m) = e^{-y_t(m)m} \quad (1)$$

Tomando o valor de 1€ para a maturidade corrente e tendendo assintoticamente para zero quando  $t$  tende para infinito.

Sabendo a ETTJ *spot* podemos deduzir as taxas *forward* implícitas de acordo com as expectativas do mercado:

$$f_t(m) = -\frac{1}{P_t(m)} \times \frac{\partial P_t(m)}{\partial m} = -\frac{P'_t(m)}{P_t(m)} \quad (2)$$

A relação entre a *yield-to-maturity* em função da taxa *forward*, isto é, a curva das TJ instantâneas, será dada por:

$$y_t(m) = \frac{1}{m} \int_0^m f_t(u) du \quad (3)$$

Isto implica que a *yield* do título de cupão zero é uma média geométrica ponderada pelo tempo das taxas *forward*, consequência da relação existente entre as TJ *spot* de longo e de curto prazo.

Por fim, a TJ  $y_t(m)$  será a taxa interna de rentabilidade da obrigação de cupão zero, á qual a mesma é descontada no momento  $t$ , para a maturidade  $m$ , e dada por:

$$y_t(m) = \frac{-\ln(P_t(m))}{m} \quad (4)$$

Demonstrada a relação existente entre a *yield*, a *forward* e *discount curve*, facilmente podemos deduzir que em qualquer momento do tempo, haverá um conjunto de títulos financeiros com maturidades e fluxos de pagamentos diferentes que podem ser utilizados com o fim de estimar os modelos da estrutura das TJ à vista ou a prazo.

### 3 MODELOS DE CONSTRUÇÃO E PREVISÃO DAS TAXAS DE JURO A TERMO

Na literatura relevante encontramos diferentes classes de modelos direcionados para a construção da estrutura a termo das TJ. Os principais modelos desenvolvidos estão divididos em três grandes classes: modelos de não-arbitragem, modelos de equilíbrio e modelos estatísticos ou paramétricos.

#### 3.1 MODELOS DE NÃO-ARBITRAGEM, DE EQUILÍBRIO E ESTATÍSTICOS OU PARAMÉTRICOS

Os modelos de não arbitragem têm como base a definição clássica de que os mercados são eficientes, isto é, que as cotações refletem de forma correta a informação existente no mercado sobre os ativos financeiros. Os modelos de não arbitragem estão, geralmente, associados à cotação e avaliação de derivados. Uma vez que os instrumentos derivados estão fortemente relacionados com a gestão de risco, para que estes não impulsionem oportunidades de arbitragem, os preços dos derivados devem ser baseados nos preços de mercado dos ativos subjacentes. Neste sentido, foram implementados esforços na construção de modelos que reflitam a condição premente de que a *yield curve* produzida reflita, na íntegra, a *yield curve* observada no mercado. Hull e White (1990) e Heath, Jarrow e Morton (1992) desenvolveram modelos sob o pressuposto de que os movimentos das curvas não proporcionam oportunidades de arbitragem. Estes modelos partem da atual *yield curve* presente no mercado e conseguem modelizar a dinâmica da curva inteira, observando a evolução da *forward rate curve*.

Vasicek (1977), Cox, et al. (1985) e Duffe e Kan (1996) desenvolveram modelos de equilíbrio que têm como principal diferença face aos modelos de não arbitragem o facto de serem utilizados para explicar a relação existente entre a estrutura a termo das TJ e suposições dinâmicas quanto à evolução futura das condições económicas. Estes modelos exigem a formulação de um conjunto de suposições quanto às variáveis que representam as condições económicas em vigor num determinado momento de tempo e formalizam a ETTJ de acordo com tais condições. Os parâmetros dos modelos de equilíbrio são estimados a partir de dados históricos, assumindo que não variam no

tempo, e baseiam-se na suposição que o preço e o rendimento das obrigações são determinados pelo mercado quanto às expectativas de evolução das TJ de curto prazo.

Alguns autores, tais como Jong (2000) e Dai e Singleton (2000) focaram-se em utilizar a modelização de equilíbrio apenas para dados da amostra, os modelos revelam-se bem ajustados aos dados históricos mas, tanto os modelos de não arbitragem como os modelos de equilíbrio, apresentam resultados fracos quando utilizados para efetuar previsões, (Duffee 2002).

Para além dos modelos de não arbitragem e de equilíbrio, importantes estudos recorreram a outro tipo de métodos na modelização. Diebold e Li (2006) denotam os modelos propostos por Fama e Bliss (1987), McCulloch (1975), McCulloch e Kwon (1993), bem como Vasicek e Fong (1982), como os de maior relevo nos processos de construção da *yield curve*.

McCulloch (1975) e McCulloch e Kwon (1993) desenvolveram um modelo da *discount curve* designado por *polynomial cubic spline* ou interpolação cúbica. Este modelo consiste na extração da *yield curve* diretamente a partir da função de desconto. Foi-lhe atribuída bastante atenção uma vez que mostrou-se capaz de capturar as várias alterações que a curva a termo das TJ pode assumir quanto ao seu formato. No entanto, o seu ajustamento diverge em maturidades de longo prazo em vez de tender para zero, o que induz a ajustes pobres das *yield curves* no que se refere a curvas planas ou que requerem extremidades planas no longo prazo. Para além disso, este modelo também pode produzir taxas *forward* instantâneas negativas, o que não é coerente.

Vasicek e Fong (1982) viabilizam a modelização através de *splines* exponenciais como métodos de interpolação. Argumentam que se o ajustamento for efetuado através de *splines* exponenciais não haverá uma grande instabilidade nas taxas *forward* como se verifica quando esta é ajustada via funções polinomiais. Apesar deste último ter respondido a algumas das limitações do modelo de McCulloch (1975), nomeadamente no que se refere à *discount curve* ser polinomial em função do tempo. (Shea 1985) concluiu que o método de Vasicek e Fong (1982) não revela maior estabilidade quando comparada com os *polynomial splines*. Para além disso, trata-se de uma técnica que requer otimização não linear iterativa o que torna a sua estimação um processo mais complexo e menos flexível quanto à sua aplicabilidade face à qualidade do modelo.

Dentro da classe de modelos paramétricos encontramos desenvolvimentos de elevado relevo como é o caso de Fama e Bliss (1987) e Nelson e Siegel (1987). Fama e Bliss (1987) optam por fazer a estimação através das taxas *forward* para maturidades observáveis em detrimento da *discount curve*. Tentam, essencialmente, responder a duas questões fundamentais levantadas pela literatura empírica dedicada à estrutura a termo das TJ. Por um lado focam-se em verificar em que medida as atuais taxas *forward* são capaz de prever as TJ futuras e, por outro lado, averiguar até que ponto estes são capazes de extrair a informação contida nas taxas *forward* correntes no que se refere à estrutura a termo dos retornos esperados sobre obrigações para maturidades diferentes. Diebold e Li (2006) descrevem o método proposto por Fama e Bliss (1987) como uma construção sequencial das taxas *forward* necessárias para avaliar, sucessivamente, títulos com maturidades mais longas, chamadas de taxas *forward* não suavizadas de Fama e Bliss, em que a taxa a termo resultante deste procedimento é uma função descontínua em relação à maturidade do título utilizado na estimação.

A abordagem de Nelson e Siegel (1987) foi um desenvolvimento fulcral neste campo de investigação. Introduzem uma modelização suave e flexível com capacidade de representar de forma consistente a estrutura a termo das TJ ao longo do tempo. Este modelo também tornou-se um dos mais populares e utilizados por entre as comunidades académicas, instituições financeiras e mercados, por se tratar de um modelo parcimonioso que não exige grande complexidade técnica na sua estimação. O modelo de Nelson e Siegel (1987) foi alvo de estudo por diversos autores, surgindo assim algumas extensões com o intuito de maximizar a flexibilidade na sua estimação e melhorar os ajustes á estrutura a prazo das TJ mais complexas quanto à sua forma. Exemplos de modelos paramétricos capazes de descrever as TJ vigentes no mercado, que tiveram como ponto de partida o modelo proposto por Nelson e Siegel (1987), são os modelos de Svensson (1995), Pooter (2007), Bliss (1997), Diebold e Li (2006), entre outros.

## 4 MODELOS PARAMÉTRICOS

### 4.1 MODELO ORIGINAL DE NELSON E SIEGEL (1987)

A formulação de Nelson e Siegel (1987) especifica uma representação parcimoniosa da taxa *forward* dada por uma função paramétrica e alisada em que a taxa *forward* instantânea para a maturidade  $m$  é dada pela solução de uma equação diferencial de 2ª ordem com raízes reais distintas representada por:

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\lambda_1} + \beta_2 e^{-m/\lambda_2} \quad (5)$$

Onde,

$m$  = maturidade;

$\beta$  = parâmetros a estimar;

$\lambda$  = constantes, positivas, de tempo associado com a equação;

Nelson e Siegel (1987) apresentam ainda uma equação para a curva das taxas *forward* instantâneas de forma mais parcimoniosa, admitindo uma única solução para a equação diferencial em que o modelo continua a ser capaz de gerar uma grande variedade de formas:

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\lambda} + \beta_2 \frac{m}{\lambda} e^{-m/\lambda} \quad (6)$$

As constantes ( $\beta_0, \beta_1, \beta_2$  e  $\lambda$ ) continuam a ser os parâmetros a estimar. Este modelo tem como suporte as funções *Laguerre* que se traduz na combinação de polinómios e exponenciais com diferentes taxas de inclinação.

Para obter a *yield/ spot rate curve* em função da maturidade para raízes iguais podemos recorrer à integração da curva das taxas *forward*, dividindo-a pelo prazo  $m$ , neste caso obtemos:

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + \beta_2 \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right) \quad (7)$$

Que é equivalente a:

$$y_m = \beta_0 + (\beta_1 + \beta_2) \left( \frac{\lambda}{m} \right) \left( 1 - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right) - \beta_2 e^{-m/\lambda} \quad (8)$$

Interpretamos  $y_m$  como a taxa de cupão zero em regime de capitalização instantânea com base numa data inicial para um determinado horizonte temporal de maturidade igual a  $m$ .

Como tínhamos referido, o modelo de Nelson e Siegel (1987) é bastante parcimonioso, capaz de construir a *yield curve* com apenas três componentes de influência sobre cada um dos parâmetros  $\beta$ . A influência de cada uma das componentes sobre os parâmetros a estimar torna-se premente, aplica a cada parâmetro uma estrutura paramétrica previamente definida com o propósito de restringir o número de formas admissíveis que a estrutura a termos das TJ pode assumir. Deste modo é possível obter as TJ a prazo a partir das três componentes com a seguinte interpretação:

1. Longo Prazo: componente em  $\beta_0$ , uma constante igual a 1 e por isso assume o mesmo valor para todos as maturidades;
2. Curto Prazo: componente de  $\beta_1$ ,  $\frac{1-e^{-m/\lambda}}{m/\lambda}$ , iniciando no valor 1 em  $m = 0$  e decrescendo exponencialmente para 0 com o decorrer da maturidade;
3. Médio prazo: componente de  $\beta_2$ ,  $\frac{1-e^{-m/\lambda}}{m/\lambda} - e^{-m/\lambda}$ , que inicialmente assume o valor 0, aumentando entre o curto e o médio prazo e decresce para 0 no longo prazo, dando origem à curvatura.

Daqui podemos concluir que:

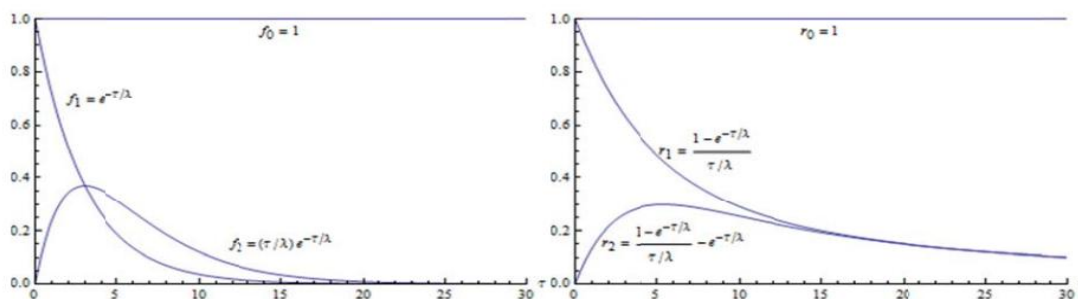
$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(m) = \lim_{m \rightarrow \infty} y(m) = \beta_0 \quad (9)$$

$$\lim_{m \rightarrow 0} f(m) = \lim_{m \rightarrow 0} y(m) = \beta_0 + \beta_1 \quad (10)$$

**ILUSTRAÇÃO 1. DECOMPOSIÇÃO DO MODELO NELSON E SIEGEL (1987) COM PARÂMETRO DE DECAIMENTO FIXO IGUAL A 3**

Painel 1. Para a Curva das taxas *forward*

Painel 2. Para a Curva das taxas *spot*



Fonte: (Annaert , et al., 2000)

Ou seja, tanto para o muito curto como para o longo prazo, as TJ *spot* e *forward* tendem para uma constante. Por outras palavras, associamos os coeficientes  $\beta_0, \beta_1$  e  $\beta_2$  às taxas de juro de longo, curto e médio prazo (respetivamente) na medida em que a contribuição da componente de  $\beta_0$  é uma constante e por isso, com o decorrer da maturidade, não tende para zero. A componente de medio prazo,  $\beta_2$ , é a função que inicia em zero (nas maturidades de curto prazo), aumenta para maturidades de médio prazo, e decai para zero (nas maturidades de longo prazo), sendo esta a razão pelo qual não está associado ao termo de curto e longo prazo. A componente  $\beta_1$  está fortemente associada ao curto prazo uma vez que decai rapidamente para zero com o decorrer da maturidade.

Por último, o fator  $\lambda$  é interpretado como um fator de escala uma vez que mede a taxa à qual os componentes de curto e longo prazo decrescem para zero. Ora, se  $\lambda$  assume valores pequenos observar-se-ão decréscimos rápidos para zero.

#### 4.2 EXTENSÕES DO MODELO DE NELSON E SIEGEL (1987)

O modelo de Nelson e Siegel (1987), como já tínhamos mencionado, tornou-se dos modelos mais populares para representar a ETTJ. Dada a popularidade do mesmo, várias foram as extensões e ajustamentos propostos ao modelo original de Nelson e Siegel (1987). Por entre os demais existentes iremos fazer a apresentação de alguns desses modelos.

Apresentaremos o modelo de Nelson e Siegel (1987) com apenas dois fatores, esta abordagem foi introduzida por Litterman e Scheinkman (1991). Estes autores demonstram que a terceira componente pouco contribui para a representação da ETTJ e que, por isso, a ETTJ poderá ser representada apenas pelas duas primeiras componentes. Em seguida, apresentaremos o modelo de três fatores introduzido por Bliss (1997) e Diebold e Li (2006), em que o primeiro propõe aumentar a flexibilidade do modelo original de Nelson e Siegel (1987) através do fator de decaimento, como iremos em seguida apresentar. O segundo, tornou-se um dos modelos mais adotados por se revelar bastante parcimonioso e por apresentar resultados encorajadores nos ajustamentos e nas previsões das TJ. A reinterpretação de Diebold e Li (2006) sobre o modelo original é, também, frequentemente designado como modelo de fatores uma vez que conseguiu capturar as diversas formas que a curva das TJ dos EUA assumiu em diferentes momentos do tempo através da estimação dos três fatores reinterpretados como nível, inclinação e curvatura.

Por fim, iremos também abordar três modelos de 4 fatores, o modelo de Svensson (1994), o modelo de Svensson ajustado por Pooter (2007) e o modelo de Björk e Christensen (1999) que se diferencia dos modelos de Svensson (1994) e Pooter (2007) na especificação do parâmetro de decaimento e da associação do 4 fator ao declive enquanto os outros modelos de 4 fatores introduzem uma nova componente curvatura. Svensson (1994) propõem um modelo de 4 fatores, acrescentando a segunda componente curvatura, mas que pode apresentar problemas de multicolinearidade na sua estimação levando Pooter (2007) a sugerir o modelo de Svensson (1994) ajustado com o fim de corrigir as fraquezas do modelo de Svensson (1994).

#### 4.2.1 MODELO DE 2 FATORES DE LITTERMAN E SCHEINKMAN (1991)

Litterman e Scheinkman (1991) mostram que as variações das TJ podem ser explicadas por um pequeno número de fatores subjacentes. Comumente, os primeiros três fatores são suficientes desde que estes expliquem a maior parte da variância das TJ. No entanto, segundo estudos de alguns autores, a variação das TJ são maioritariamente explicadas pelos dois primeiros fatores. Pooter (2007) confronta o modelo de Nelson e Siegel (1987) com algumas das suas extensões e mostra que a variância da *yield curve* estimada para a amostra utilizada no seu trabalho (rendimentos, no final do mês, das

obrigações de cupão-zero<sup>4</sup> dos EUA) foi explicada em 95,6% pelo primeiro componente e 4% pelo segundo, em que o terceiro apenas representou 0,23% de explicação da *yield curve*, evidenciando o fraco contributo do terceiro sobre a curva de rendimentos quando aplicado à sua base de dados.

Neste sentido, o modelo de Nelson e Siegel (1987) com dois fatores será:

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) \quad (11)$$

Diebold, Piazzesi e Rudebusch (2005) testam o modelo de Nelson e Siegel (1987) ajustado para dois fatores e concluem que, quando comparado com o modelo de três fatores, o modelo com as duas componentes é capaz de explicar quase toda a variação das TJ e que pode ser suficiente para fazer previsões. No entanto, estes argumentam que, muito provavelmente, o modelo não é capaz de capturar, a curva na sua totalidade.

#### 4.2.2 MODELO DE 3 FATORES DE BLISS (1997)

Bliss (1997) reajusta o modelo base de Nelson e Siegel (1987) com o intuito de aumentar a sua flexibilidade, não restringindo a aplicação do mesmo parâmetro  $\lambda$  para as componentes de curto e médio prazo mas sim atribuindo dois parâmetros de decaimento diferentes  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Assim, a expressão analítica para curva das taxas *spot* é dada por:

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_2}}}{\frac{m}{\lambda_2}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda_2}} \right) \quad (12)$$

E a respetiva curva das taxas *forward*:

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\lambda_1} + \beta_2 \frac{m}{\lambda} e^{-m/\lambda_2} \quad (13)$$

O modelo de Bliss (1997) só será diferente do modelo de Nelson e Siegel (1987) quando os parâmetros  $\lambda$  forem diferentes, isto é,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ . Nelson e Siegel (1987)

---

<sup>4</sup> Pooter (2007) testa alguma das extensões do modelo de Nelson e Siegel (1987) nos rendimentos mensais de obrigações de cupão-zero dos EUA no período 1984:1 – 2003:12, tendo assim, 240 observações históricas para 17 maturidades compreendidas entre 3 meses e 10 anos.

também estimam a curva das taxas *forward* com parâmetros de decaimento diferentes. No entanto, como já tínhamos mencionado quando apresentamos o modelo original, este arguem que o modelo é mais parcimonioso quando utilizam apenas um parâmetro  $\lambda$  e que o modelo continua a capturar a curva com a mesma qualidade no ajuste. Não obstante, torna-se necessário referenciar que Nelson e Siegel (1987) procuram avaliar a adequação do modelo para descrever a relação entre a *yield curve* e os Bilhetes de Tesouro Norte Americanos, isto é, utilizam uma amostra com maturidades inferiores a um ano. Bliss (1997) mostra que a incorporação do parâmetro adicional ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) permite superar alguns dos problemas no modelo original de Nelson e Siegel (1987) no ajuste da *yield curve* para maturidades com prazos mais longos.

#### 4.2.3 MODELO DE 3 FATORES DE DIEBOLD E LI (2006)

Diebold e Li (2006) apresentam um dos maiores contributos no modelo original de Nelson e Siegel (1987) ao mostrarem que os coeficientes  $\beta_0, \beta_1$  e  $\beta_2$  do modelo original podem ser interpretados como fatores dinâmicos. Isto é, variáveis ao longo do tempo, passando a designa-los como:  $\beta_{0,t}, \beta_{1,t}$  e  $\beta_{2,t}$ , e reinterpretados como nível, inclinação e curvatura, respetivamente. Esta interpretação é entendida quando analisamos o comportamento da *yield curve* para diferentes valores nos parâmetros do modelo. Diebold e Li (2006) explicam o comportamento da curva de rendimentos em função dos parâmetros que Nelson e Siegel (1987) atribuem como curto, médio e longo prazo.

Afirmam que o parâmetro  $\beta_0$  (longo prazo) está associado ao nível da curva uma vez que  $y_m(\infty) = \beta_0$  (como já tínhamos verificado) e que quando há um aumento de  $\beta_0$ , toda a *yield curve* também aumenta de forma idêntica para todas as maturidades, o que justifica, claramente, a relação atribuída ao parâmetro de longo prazo com o nível da curva de rendimentos.

Identificam o parâmetro de curto prazo como inclinação da *yield* pois quando  $\beta_1$  aumenta, verifica-se um aumento mais significativo nas *yields* de curto prazo do que nas de longo prazo. Isto porque o peso das TJ de curto prazo sobre  $\beta_1$  é mais forte, ocasionando a alteração da inclinação da *yield curve*.

Os autores demonstram a forte relação existente entre a curvatura com o fator de médio prazo  $\beta_2$ . Quando  $\beta_2$  aumenta, o impacto sobre as *yields* de muito curto e muito longo prazo é pouco significativo. No entanto, um aumento nas *yields* de médio prazo acentua

a curvatura da *yield curve*. O peso do parâmetro associado a  $\beta_2$  é mínimo no curto e longo prazo mas apresenta uma carga notória sobre o medio prazo. Por último, Diebold e Li (2006) utilizam modelos de series temporais (modelos Autorregressivos (AR) e modelos Vetoriais Autorregressivos (VAR)) para explicar a evolução dos fatores ao longo do tempo, obtendo resultados bastante satisfatórios<sup>5</sup>, tanto para ajustamentos como também para previsões da ETTJ.

Os autores, ao apresentarem uma nova interpretação para os coeficientes do modelo de Nelson e Siegel (1987), conseguiram demonstrar a capacidade que o modelo continua a ter em replicar os principais fatores empíricos associados à estrutura a termo das TJ. Concluíram que a curva continua a ser coerente. Apresentando, em média, inclinação e concavidade positiva, as TJ são mais estáveis para maturidades longas do que para maturidades mais curtas, o que faz sentido na medida em que, á priori, as TJ de curto prazo são mais voláteis e a volatilidade tende a diminuir com o decorrer da maturidade.

Dito isto, estamos em condições de confrontar o modelo original de Nelson e Siegel (1987) com o modelo proposto por Diebold e Li (2006) com a finalidade de observar as principais diferenças introduzidas. Como já tínhamos visto anteriormente, Nelson e Siegel (1987), com a finalidade de ajustar a curva de rendimentos, parametrizam o modelo da *yield curve*, da seguinte forma:

$$y_m = a + b \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + ce^{-\frac{m}{\lambda}} \quad (14)$$

Por sua vez, Diebold e Li (2006) adotam a parametrização:

$$y_{m,t} = \beta_{0,t} + \beta_{1,t} \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) + \beta_{2,t} \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda}} \right) \quad (15)$$

Com:

---

<sup>5</sup> Importa referir que a base de dados de Diebold e Li (2006) é constituída pelas *U.S. treasury bond* que compreende o período de Janeiro de 1985 a Dezembro de 2000, para dezassete maturidades mensais diferentes (3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 30, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120) e que as considerações expostas referem-se a esta amostra.

$$a = \beta_{0,t}; b = \beta_{1,t} + \beta_{2,t}; c = \beta_{2,t} \quad (16)$$

Onde  $\beta_{0,t}$ ,  $\beta_{1,t}$  e  $\beta_{2,t}$  são fatores dinâmicos que evoluem de acordo com um processo AR, tal que:

$$\hat{\beta}_{i,t+h} = \mu + \Phi_{t+h} (\hat{\beta}_{i,t} - \mu) + \varepsilon_t \quad i = 0,1,2; \quad (17)$$

Em que  $h$  representa o número de defasamentos considerados para efeitos de previsão,  $\mu$  representa a estimativa da média de acordo com o modelo AR e  $\varepsilon_t$  representa o erro estocástico. Ou, complementarmente, de acordo com o processo VAR:

$$\hat{\beta}_{i,t+h} = c + \Gamma_{t+h} \hat{\beta}_{i,t} + \varepsilon_t \quad (18)$$

Em que  $c$  representa o vetor das constantes e  $\Gamma_{t+h}$  representa a matriz de coeficientes da estimação do modelo.

Os autores referem que, as previsões efetuadas com base num modelo VAR é feito apenas como fim complementar uma vez que, de acordo com a literatura macroeconómica, um processo VAR sem restrições tende a produzir previsões com menor qualidade devido ao grande número de parâmetros incluídos o que tipicamente leva a modelos excessivamente ajustados aos dados observados (*overfitting*).

Diebold e Li (2006) justificam a nova parametrização com os seguintes argumentos: as

componentes  $\left(\frac{1-e^{-\frac{m}{\lambda}}}{\frac{m}{\lambda}}\right)$  e  $e^{-\frac{m}{\lambda}}$  têm formas monotonicamente decrescentes similares,

assim, se interpretarem os parâmetros  $b$  e  $c$  como fatores, os seus *loadings* irão ser forçosamente similares, criando dois tipos de problemas:

1. Por um lado, seria difícil fornecer interpretações intuitivas para esta componente;
2. Por outro lado, iria ser difícil estimar as componentes com precisão uma vez que *loadings* bastante similares induzem em problemas de multicolinearidade;

Um dos principais avanços introduzidos no modelo de Nelson e Siegel (1987) por Diebold e Li (2006) é que, ao contrário do modelo original, a estimação da estrutura temporal das TJ é capaz de evoluir de forma dinâmica ao invés de se limitar a representá-la em momentos do tempo exatos.

A reinterpretação de Diebold e Li (2006) para além de manter as propriedades empíricas da representação histórica da ETTJ, também apresenta previsões coerentes para as mesmas no futuro.

De acordo com Diebold e Li (2006) existem factos estilizados que caracterizam a *yield curve* e que um modelo que a represente deve ser perfeitamente capaz de replicar as características dinâmicas da forma que a curva apresenta em diferentes períodos de tempo, nomeadamente:

1. comportamento de reversão à média: quando as TJ atingem níveis elevados/baixos tendem seguidamente a diminuir/ aumentar;
2. as TJ com diferentes maturidades são positivamente correlacionadas entre si e a correlação diminui com o aumento da diferença entre maturidades;
3. as TJ de curto prazo são mais voláteis do que as TJ de longo prazo;

Os autores aferem quanto à dificuldade de encontrar um modelo parcimonioso capaz de representar tais características e argumentam que o modelo que desenvolveram é capaz de as representar satisfatoriamente.

#### 4.2.4 MODELO DE 4 FATORES DE SVENSSON (1994)

Svensson (1994), propôs o aumento de flexibilidade no modelo desenvolvido por Nelson e Siegel (1987) através de um quarto componente exponencial que é interpretado como componente de dupla curvatura permitindo, teoricamente, melhorar os ajustes dos formatos da estrutura temporal das TJ. O quarto componente adicionado trata-se de um segundo termo denominado como *hump-shape* (forma da curvatura) com dois parâmetros adicionais,  $\beta_3$  e  $\lambda_2$ , com  $\lambda_2$  positivo.

Assim, a *forward rate curve* introduzida por Nelson e Siegel (1987) e aumentada por Svensson (1994) é representada da seguinte forma:

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-m/\lambda_1} + \beta_2 \frac{m}{\lambda_1} e^{-m/\lambda_1} + \beta_3 \frac{m}{\lambda_2} e^{-m/\lambda_2} \quad (19)$$

Como já tínhamos visto, integrando a taxa *forward*, obtemos a taxa *spot* em função do tempo para a maturidade:

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_2}}}{\frac{m}{\lambda_2}} - e^{-\frac{m}{\lambda_2}} \right) \quad (20)$$

O modelo passa a ser representado por seis parâmetros,  $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \lambda_1, \lambda_2$ , e a forma geral da curva tem duas curvaturas, que ao serem combinadas conseguem representar a curva inteira das taxa *forward* instantâneas. De forma análoga a  $\beta_2, \beta_3$  determina a magnitude e a direção da curvatura e  $\lambda_2$ , tal como  $\lambda_1$ , especifica a posição/ inclinação do segundo *hump* da curva.

$$\beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_2}}}{\frac{m}{\lambda_2}} - e^{-\frac{m}{\lambda_2}} \right)$$

Pode-se dizer que a componente introduzida por Svensson (1994) acresce no modelo mais uma componente de médio prazo. Assim, o modelo de Svensson (1994) traduz-se no modelo base introduzido por Nelson e Siegel (1987) mas com um novo fator curvatura. No entanto, a estimação do modelo pode levar a problemas de multicolineariedade quando os parâmetros de decaimento assumem valores muito próximos.

#### 4.2.5 MODELO DE 4 FATORES DE SVENSSON (1994) AJUSTADO POR POOTER (2007)

Pooter (2007) sugere um ajustamento ao modelo de Svensson (1994) com o fim de contornar os problemas de multicolineariedade na estimação do modelo de quatro fatores. Assim, é introduzida uma restrição que obriga a que as duas componentes de médio prazo sejam distintas para valores de  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  muito próximos.

O ajuste introduzido no modelo proposto por Svensson (1994) é:

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\lambda_1}} + \beta_2 \frac{m}{\lambda_1} e^{-\frac{m}{\lambda_1}} + \beta_3 \left( e^{-\frac{m}{\lambda_2}} + \left( \frac{2m}{\lambda_2} - 1 \right) e^{-\frac{2m}{\lambda_2}} \right) \quad (21)$$

Onde,

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_2}}}{\frac{m}{\lambda_2}} - e^{-\frac{2m}{\lambda_2}} \right) \quad (22)$$

De acordo com Pooter<sup>6</sup> (2007) o ajustamento introduzido garantirá que a multicolineariedade não será emitida na modelização *infra* sem afetar a qualidade da modelização da estrutura temporal das TJ.

#### 4.2.6 MODELO DE 4 FATORES DE BJÖRK E CHRISTENSEN (1999)

Com o intuito de aumentar a flexibilidade no modelo de Nelson e Siegel (1987), Björk e Christensen (1999) propuseram um novo fator para aproximar a curva das taxas *forward*.

$$f_m = \beta_0 + \beta_1 e^{-\frac{m}{\lambda_1}} + \beta_2 \frac{m}{\lambda_1} e^{-\frac{m}{\lambda_1}} + \beta_3 e^{-\frac{2m}{\lambda_1}} \quad (23)$$

Em que a respetiva curva de rendimentos é dada por:

$$y_m = \beta_0 + \beta_1 \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_2 \left( \left( \frac{1 - e^{-\frac{m}{\lambda_1}}}{\frac{m}{\lambda_1}} \right) - e^{-\frac{m}{\lambda_1}} \right) + \beta_3 \left( \frac{1 - e^{-\frac{2m}{\lambda_1}}}{\frac{2m}{\lambda_1}} \right) \quad (24)$$

A componente acrescentada,  $\left( \frac{1 - e^{-\frac{2m}{\lambda_1}}}{\frac{2m}{\lambda_1}} \right)$ , é bastante semelhante à segunda componente do modelo, afetando apenas as maturidades de curto prazo e é entendida como uma segunda componente de inclinação, conseqüentemente,  $\beta_3$  é o segundo fator de declive. No entanto, o quarto componente do modelo de Björk e Christensen (1999) decresce para zero a uma velocidade maior. Neste sentido, o quarto componente captura o declive da curva através de duas componentes, isto é, com as componentes  $\beta_1$  e  $\beta_3$ . Por fim, os autores utilizam o mesmo parâmetro de decaimento no modelo, facilitando a estimação do mesmo.

Diebold, Rudebusch e Aruoba (2006) concluem que o modelo de 4 fatores melhora, significativamente, os ajustamentos da ETTJ mas não analisam a capacidade deste para efetuar previsões fora da amostra.

---

<sup>6</sup> As diferenças entre a adição do componente de curvatura do modelo de Svensson (1994) e Svensson Ajustado podem ser visualizadas em Pooter (2007). *Examining the Nelson-Siegel Class of Term Structure Models*.

#### 4.2.7 CONCLUSÕES

Dito isto, podemos concluir que o estudo efetuado por Litterman e Scheinkman (1991), apesar de demonstrar claramente que a variação das TJ podem ser explicadas apenas com as duas primeiras componentes do modelo original de Nelson e Siegel (1987), o modelo de dois fatores pode revelar-se insuficiente para modelizar a ETTJ na sua totalidade e, conseqüentemente, capturar as diferentes formas que a *yield curve* pode assumir em diferentes momentos do tempo.

Bliss (1997) demonstra que o modelo de Nelson e Siegel (1987) não perde qualidade nem apresenta problemas na estimação se forem considerados parâmetros de decaimento diferentes para as duas últimas componentes quando considerado para efeitos de estimação das TJ de longo prazo. No entanto, quando comparado com o modelo original, este não apresenta maior flexibilidade na sua estimação e apenas diferencia-se do modelo de Nelson e Siegel (1987) quando os parâmetros de decaimento são diferentes, denotando-se ser menos parcimonioso sem acrescentar aumento de qualidade comparativamente ao modelo original exceto na captação de TJ muito longo prazo.

Por outro lado, Diebold e Li (2006), insere um dos maiores avanços sobre o reajustamento do modelo de Nelson e Siegel (1987) através da estimação dos coeficientes de forma dinâmica, ao invés de estática no tempo sugerida no modelo original. Demonstram que estes fatores estão fortemente relacionados com o nível, inclinação e curvatura da ETTJ, ao mesmo tempo que conseguem capturar as várias formas que esta pode assumir ao longo do tempo. O avanço introduzido pelos autores é notório quando observamos o aumento da flexibilidade na estimação do modelo, bem como na reinterpretação dos coeficientes. Diebold e Li (2006) apresentam resultados bastante satisfatórios quando efetuam previsões dos coeficientes através de simples modelos AR e VAR, contrariamente a outros modelos propostos na classe de modelos paramétricos.

Os modelos de quatro fatores de Svensson (1994) e o modelo de Svensson (1994) ajustado por Pooter (2007), introduzem uma segunda componente curvatura. O objetivo é aumentar a flexibilidade do modelo original e melhorar os ajustes dos diversos formatos que a ETTJ pode assumir em diferentes momentos de tempo. O modelo de Pooter (2007) tenta corrigir a principal limitação do modelo de Svensson (1994), isto é,

o facto de poder-se incorrer em problemas de multicolinearidade na estimação do modelo quando o fator de decaimento da terceira e quarta componente apresentarem valores muito próximos. Para isso, Pooter (2007) introduz uma restrição sobre o segundo fator de decaimento. Os resultados obtidos por Pooter (2007) são satisfatórios, tanto para ajustamentos como para previsões, no entanto, a introdução das restrições com o fim de corrigir os eventuais problemas na estimação aumenta a complexidade do processo de ajustamento da ETTJ.

Por fim, Björk e Christensen (1999) introduzem, também, uma quarta componente no modelo de Nelson e Siegel (1987) bastante similar à segunda componente do mesmo, esta componente afeta apenas as maturidades de curto prazo uma vez que representa uma segunda componente de inclinação. Este modelo utiliza um fator de decaimento fixo para todas as componentes e, quando testado por outros autores, demonstra maior flexibilidade na estimação da ETTJ e aumento de qualidade para os ajustamentos das TJ.

## 5 AJUSTAMENTO E PREVISÃO DA *YIELD CURVE* NA ZONA EURO

### 5.1 OBJETIVOS

Após a exposição teórica do modelo original de Nelson e Siegel (1987) e das suas principais extensões, neste capítulo, vamos começar por efetuar as estimativas dos fatores de cada um dos modelos que optamos testar e que em seguida referenciamos, através de um modelo de regressão linear ajustados pelo método dos MQO.

Nesta análise, optamos por estudar um modelo de 2, de 3 e de 4 fatores com a finalidade de perceber qual destes ajusta-se melhor aos dados da Zona Euro e ver até que ponto a aplicação dos mesmos vão encontro das principais conclusões apontadas pela revisão de literatura estudada.

Neste sentido, efetuamos os ajustamentos através do modelo de 2 fatores introduzido por Litterman e Scheinkman (1991). Esta análise irá permitir concluir se, para os dados da Zona Euro, conseguimos replicar as *yield curves* ou se, apesar de este modelo explicar a *yield curve* quase na totalidade com os dois primeiros fatores, assim como os autores defendem, estes serão insuficientes para capturar a curvatura da mesma por inteiro, (Diebold, Piazzesi e Rudebusch 2005).

No que se refere ao modelo de 3 fatores, iremos fazer a aplicação do modelo original de Nelson e Siegel (1987) reinterpretado por Diebold e Li (2006) em detrimento do modelo de Bliss (1997). A opção em fazer os ajustamentos com base neste modelo passa pelo facto de ser um dos modelos de Nelson e Siegel (1987) mais popular devido aos resultados bastante encorajadores que apresentaram tanto nos ajustamentos como nas previsões e pelo facto de manter a simplicidade na sua estimação e interpretação.

No ajustamento com base num modelo de 4 fatores, privilegiamos os modelos que considera apenas um fator de decaimento fixo, isto porque, de acordo com o exposto no capítulo anterior, é um modelo mais parcimoniosos e que exige menos complexidade na estimação computacional, ao mesmo tempo que revelou resultados satisfatórios quando comparados com os modelos que utilizam parâmetros de decaimento diferentes ou variáveis ao longo do tempo. Para além disso, estes últimos, podem incorrer em problemas de multicolinearidade que obrigaria à introdução de restrições para corrigi-los. Desta forma, privilegiamos a estimação do modelo de 4 fatores de Björk e

Christensen (1999) pois, para além de apresentar resultados satisfatórios nos ajustamentos, exige menos complexidade.

Para analisar a qualidade dos resultados obtidos nos ajustamentos vamos basear-nos na leitura dos coeficientes de determinação obtidos nas regressões lineares e tentar perceber se a presença de crises financeiras podem afetar a qualidade desses resultados, bem como, perceber com que amplitude a presença de dados historicamente voláteis podem afetar o desempenho de cada um dos modelos estimados. Em seguida, vamos testar a capacidade de cada um dos modelos para efeitos de previsão, comparando os resultados obtidos entre si e o impacto da crise financeira mais turbulenta na qualidade dos resultados obtidos. Nesta fase do estudo, iremos efetuar as previsões com base num processo AR para os coeficientes de cada um dos modelos, tal como é efetuada na literatura relevante e, complementarmente, vamos introduzir uma forma alternativa, também com base num processo AR mas para a previsão das TJ ajustadas que será explicado mais à frente no presente estudo.

Para tal, antes de mais, começamos por expor a descrição da base de dados utilizada para a estimação dos mesmos.

## 5.2 BASE DE DADOS

A nossa base de dados é constituída pelas TJ EURIBOR (*Euro Interbank Offered Rate*) para maturidades de curto prazo e pelas TJ *swap* para maturidades de médio e longo prazo.

A EURIBOR baseia-se na média das TJ de empréstimos praticados entre 57 bancos europeus, denominado como empréstimos interbancários. A escolha da EURIBOR para o estudo em apreço prende-se com o facto de ser a TJ variável de referência no sistema monetário interbancário da Zona Euro, sendo o principal indexante do eurosistema e é considerada como a TJ sem risco de referência da Zona Euro. Comumente, a EURIBOR é a TJ de referência para aplicações financeiras, crédito à habitação, bem como, para a avaliação de diversos produtos financeiros, como por exemplo futuros sobre TJ.

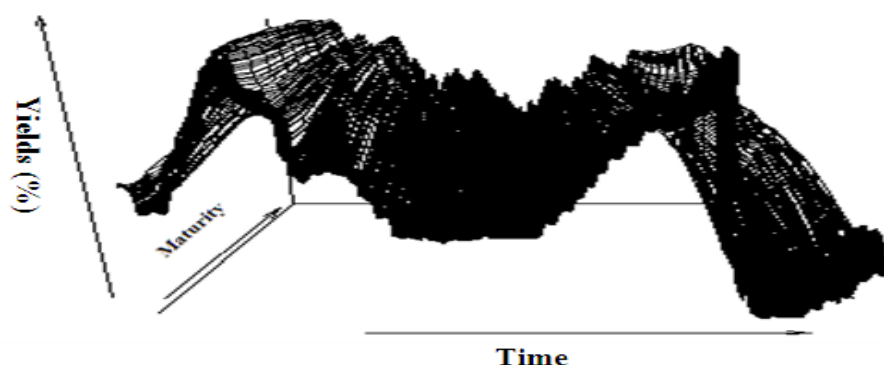
Assim, no que se refere ao curto prazo, a nossa base de dados é constituída pelas taxas EURIBOR diárias para 12 maturidades mensais (de 1 mês a 12 meses, inclusive) no período compreendido entre 25 de Janeiro de 1999 a 24 de Outubro de 2011. As taxas

EURIBOR que constituem a nossa amostra foram extraídas da base de dados *Datastream*.

A *TJ swap* é a TJ de referência no mercado interbancário na determinação das TJ fixas a aplicar em operações de médio e longo prazo. A ISDA (*International Swaps and Derivatives Association*) é uma plataforma eletrónica especializada, que divulga diariamente as principais taxas *swap*, sendo as taxas ISDAFIX a principal referência para taxas *swap* anuais a nível mundial. Na atualidade a ISDAFIX divulga taxas *swap* para diversas moedas, como é o caso do Euro. Por se tratar de uma taxa de referência de médio e longo prazo, optamos por utilizar as mesmas para a nossa amostra. As TJ correspondem, tal como para as taxas EURIBOR, a observações diárias do período de 25 de Janeiro de 1999 a 24 de Outubro de 2011. As maturidades utilizadas são: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 anos. As *TJ swap* fornecidas pela ISDA foram extraídas da plataforma *Thomson Reuters*.

Em suma, a nossa amostra traduz-se em observações diárias das TJ EURIBOR e taxas *swap*, para as maturidades mencionadas. Na totalidade, a amostra é constituída por 3326 observações diárias para cada uma das 21 maturidades, isto é, estamos perante 3326 *yield curves*. Para o presente estudo, as observações diárias foram privilegiadas uma vez que aumentam, significativamente, o tamanho da amostra e melhora a qualidade da estimação. Uniformizando as 21 maturidades, estas correspondem a: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108 e 120 meses.

## **ILUSTRAÇÃO 2. ESTRUTURA A TERMO DAS TAXAS DE JURO NA ZONA EURO**



Fonte: Elaboração própria

Torna-se importante referir que a nossa base de dados contém períodos críticos no que se refere à história económica e financeira, isto é, incluí períodos de grande volatilidade das TJ, consequência da crise da bolha da internet, a crise do *subprime* e o início da crise da dívida soberana na Zona Euro.

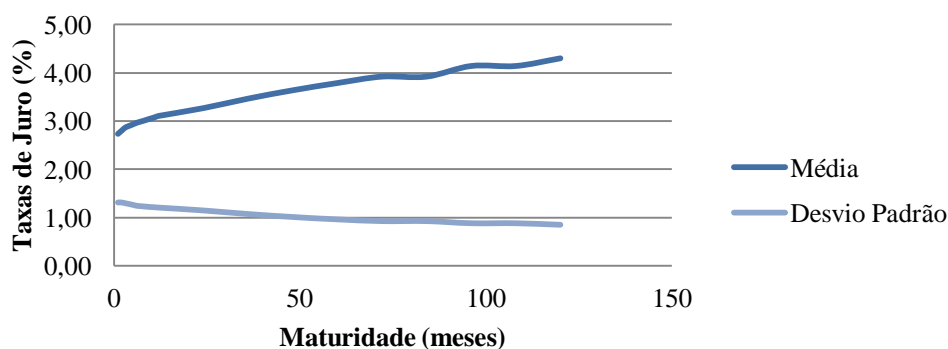
Na Tabela 1, podemos observar as estatísticas descritivas para cada uma das *yield curves* presentes na nossa base de dados. As estatísticas descritivas das *yield curves* demonstram, claramente, a presença da curva de rendimentos típica. Estamos perante TJ que tendem a aumentar, em média, com o decorrer da maturidade, isto é, com inclinação ascendentemente positiva. Também podemos verifica-se que existe maior volatilidade para as taxas de curto prazo em relação às taxas de longo prazo.

**TABELA 1. ESTATÍSTICAS DESCRITIVAS - *YIELD CURVES***

<b>Maturidade (meses)</b>	<b>Mínimo</b>	<b>1º Quartil</b>	<b>Mediana</b>	<b>Média</b>	<b>3º Quartil</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>1</b>	0.397	2,07	2.641	2,73	3,76	5.197	1,313
<b>2</b>	0.500	2,09	2.678	2,80	3,82	5.250	1,312
<b>3</b>	0.634	2,11	2.740	2,86	3,86	5.393	1,297
<b>4</b>	0.741	2,11	2.812	2,90	3,89	5.416	1,281
<b>5</b>	0.835	2,11	2.859	2,93	3,94	5.428	1,264
<b>6</b>	0.944	2,11	2.905	2,96	3,99	5.448	1,245
<b>7</b>	0.985	2,11	2.932	2,98	4,01	5.459	1,237
<b>8</b>	1.030	2,12	2.945	3,01	4,05	5.469	1,230
<b>9</b>	1.084	2,13	2.962	3,03	4,06	5.484	1,222
<b>10</b>	1.125	2,14	2.974	3,06	4,08	5.493	1,217
<b>11</b>	1.167	2,15	2.981	3,08	4,10	5.502	1,212
<b>12</b>	1.211	2,17	2.986	3,11	4,11	5.526	1,206
<b>24</b>	1.236	2,37	3.131	3,27	4,30	5.565	1,146
<b>36</b>	1.390	2,60	3.312	3,47	4,41	5.645	1,071
<b>48</b>	1.560	2,83	3.555	3,64	4,52	5.697	1,009
<b>60</b>	1.732	3,01	3.752	3,79	4,58	5.745	0,959
<b>72</b>	1.891	3,17	3.887	3,93	4,66	5.806	0,923
<b>84</b>	1.891	3,17	3.887	3,93	4,66	5.806	0,923
<b>96</b>	2.141	3,41	4.114	4,15	4,81	5.938	0,878
<b>108</b>	2.141	3,41	4.114	4,15	4,81	5.938	0,878
<b>120</b>	2.328	3,60	4.285	4,31	4,92	6.016	0,846

Fonte: Elaboração própria

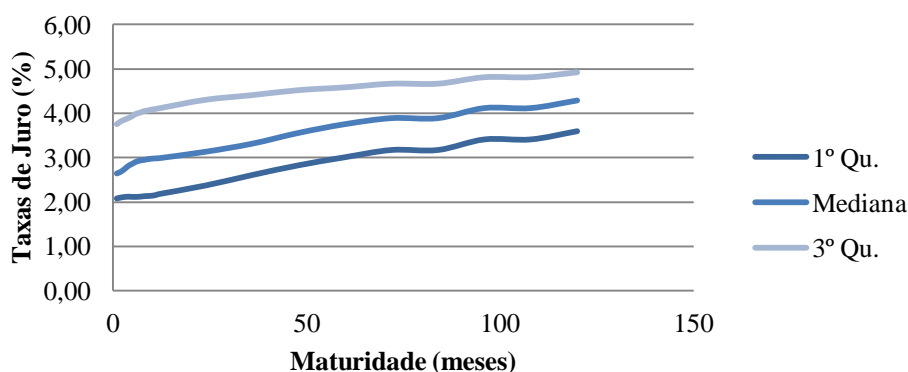
**GRÁFICO 1. MÉDIA E DESVIO PADRÃO**



Fonte: Elaboração própria

É de interesse observar o facto de o desvio padrão (DP) diminuir com o aumento da maturidade, afastando-se da média, estes dados vêm realçar que as TJ de curto prazo são mais voláteis que as de longo prazo. É natural que as TJ de curto prazo reajam mais rapidamente a mudanças na conjuntura económica, implicando assim, a maior variabilidade observada nas mesmas.

**GRÁFICO 2. MEDIANA, 1º E 3º QUARTIS**



Fonte: Elaboração própria

O Gráfico 2 demonstra a representação da mediana das *yields* para as diferentes maturidades a par dos seus quartis (25% e 75%). Verificamos que a distribuição das *yields* em torno da mediana tende a ser assimétrica e com inclinação positiva, o que vai ao encontro da forma típica da ETTJ, em que, como já foi referido, as *yields* de curto prazo são mais voláteis do que as de longo prazo.

Por fim, a análise da matriz de correlações entre as *yield curves* com diferentes maturidades (Tabela 2), vem demonstrar a forte evidência de que as TJ para maturidades subsequentes são altamente correlacionadas entre si em sentido positivo. Vemos que com o afastamento das maturidades, tal correlação, tende a diminuir. No entanto, como seria de se esperar, a correlação das curvas de rendimentos continua a ser forte entre todas as maturidades.

**TABELA 2. MATRIZ DE CORRELAÇÃO DAS *YIELD CURVES***

<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>	<b>10</b>	<b>11</b>	<b>12</b>	<b>24</b>	<b>36</b>	<b>48</b>	<b>60</b>	<b>72</b>	<b>84</b>	<b>96</b>	<b>108</b>	<b>120</b>	<b>Maturidades (meses)</b>	
1,000	0,998	0,993	0,990	0,987	0,983	0,980	0,977	0,974	0,971	0,967	0,964	0,939	0,916	0,895	0,875	0,854	0,854	0,816	0,816	0,789	<b>1</b>	
	1,000	0,998	0,996	0,994	0,991	0,989	0,986	0,983	0,981	0,978	0,975	0,944	0,920	0,897	0,875	0,852	0,852	0,811	0,811	0,783	<b>2</b>	
		1,000	0,999	0,998	0,996	0,994	0,992	0,990	0,988	0,985	0,983	0,947	0,922	0,897	0,874	0,850	0,850	0,806	0,806	0,776	<b>3</b>	
			1,000	1,000	0,998	0,997	0,996	0,994	0,992	0,990	0,988	0,952	0,927	0,902	0,878	0,853	0,853	0,809	0,809	0,778	<b>4</b>	
				1,000	1,000	0,999	0,998	0,996	0,995	0,993	0,991	0,956	0,930	0,905	0,880	0,856	0,856	0,810	0,810	0,778	<b>5</b>	
					1,000	1,000	0,999	0,998	0,997	0,996	0,995	0,959	0,933	0,907	0,882	0,856	0,856	0,809	0,809	0,777	<b>6</b>	
						1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,996	0,961	0,935	0,909	0,883	0,857	0,857	0,810	0,810	0,777	<b>7</b>	
							1,000	1,000	0,999	0,999	0,998	0,964	0,937	0,911	0,885	0,859	0,859	0,811	0,811	0,777	<b>8</b>	
								1,000	1,000	1,000	0,999	0,965	0,939	0,913	0,887	0,860	0,860	0,811	0,811	0,777	<b>9</b>	
									1,000	1,000	1,000	0,967	0,941	0,914	0,888	0,862	0,862	0,812	0,812	0,778	<b>10</b>	
										1,000	1,000	0,968	0,942	0,916	0,890	0,863	0,863	0,813	0,813	0,779	<b>11</b>	
											1,000	0,969	0,943	0,917	0,891	0,864	0,864	0,814	0,814	0,779	<b>12</b>	
													1,000	0,994	0,981	0,965	0,946	0,946	0,908	0,908	0,879	<b>24</b>
														1,000	0,996	0,987	0,975	0,975	0,945	0,945	0,921	<b>36</b>
															1,000	0,997	0,990	0,990	0,969	0,969	0,950	<b>48</b>
																1,000	0,998	0,998	0,985	0,985	0,970	<b>60</b>
																	1,000	0,994	0,994	0,984	<b>72</b>	
																		1,000	0,994	0,994	0,984	<b>84</b>
																			1,000	1,000	0,998	<b>96</b>
																				1,000	0,998	<b>108</b>
																					1,000	<b>120</b>

Fonte: Elaboração própria

### 5.3 ESTIMAÇÃO DA CLASSE DE MODELOS DE NELSON E SIEGEL (1987) E AJUSTAMENTOS DA *YIELD CURVE*

Quando procedemos à estimação do modelo de Nelson e Siegel (1987), bem como das suas extensões, a primeira questão com que nos deparamos é qual o valor mais apropriado a aplicar ao fator de decaimento  $\lambda_m$ . Diebold e Li (2006) optam por utilizar o valor que maximiza o fator curvatura ( $\beta_2$ ), ou médio prazo. O parâmetro encontrado por estes é 0,0609 e, em linha com a demais literatura relevante, em torno da aplicação dos modelos de Nelson e Siegel (1987) com fatores de decaimento fixo, optamos por adotar o mesmo método no nosso estudo. Verificamos que a componente curvatura atinge o seu máximo nas maturidades 24 e 36 meses, pelo que o valor médio é 30. Neste sentido, fixamos a maturidade em 30 meses e o valor de  $\lambda_m = 0,0609$  é o valor que maximiza o fator curvatura, isto é, o fator que tem influência sobre as maturidades de medio prazo. Após termos fixado um valor para o parâmetro  $\lambda_m$  estamos em condições de estimar os fatores  $\beta$ 's para cada observação diária através dos MQO. Assim, quando aplicamos o método dos MQO sobre as TJ reais a cada um dos modelos que estamos interessados em estimar, iremos obter os valores dos coeficientes de regressão e as respetivas séries de erros ou resíduos. Obtendo os valores das regressões estamos em condições de avaliar a capacidade de cada um dos modelos em efetuar ajustamentos das TJ e, após a comparação de resultados, concluir qual dos modelos apresenta resultados mais satisfatórios para os dados da Zona Euro.

**TABELA 3. SÍNTESE DOS COEFICIENTES DE REGRESSÃO DE LITTERMAN E SCHEINKAM (1991)**

	<b>Coefficientes</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>Modelo de 2 Fatores</b>	$\beta_0$	4,304	4,229	2,154	6,339	0,891
	$\beta_1$	-1,641	-1,709	-3,507	1,736	1,045

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 4. SÍNTESE DOS COEFICIENTES DE REGRESSÃO DE DIEBOLD E LI (2006)**

	<b>Coefficientes</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>Modelo de 3 Fatores</b>	$\beta_0$	4,598	4,428	2,315	6,420	0,908
	$\beta_1$	-1,782	-1,985	-3,662	1,653	1,125
	$\beta_2$	-1,212	-1,365	-4,544	3,979	1,513

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 5. SÍNTESE DOS COEFICIENTES DE REGRESSÃO DE BJÖRK E CHRISTENSEN (1999)**

	<b>Coefficientes</b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>Modelo de 4 Fatores</b>	$\beta_0$	4,858	4,874	3,199	6,558	0,736
	$\beta_1$	2,109	1,199	-8,962	21,711	5,437
	$\beta_2$	-4,410	-3,218	-18,592	2,668	3,660
	$\beta_3$	-4,277	-3,120	-22,868	7,208	5,381

Fonte: Elaboração própria

Verificamos que os coeficientes  $\beta_0$  são menos voláteis que os restantes coeficientes para todos os modelos. Os resultados obtidos para os coeficientes de regressão, em todos os modelos, vão ao encontro da teoria financeira quanto à volatilidade das TJ, em que as taxas de curto prazo são mais voláteis e as TJ de longo prazo são mais persistentes. O DP comprova que o fator nível é mais homogêneo (tem menos variabilidade) do que o fator inclinação e curvatura.

A qualidade das regressões diárias obtidas para cada um dos modelos de Nelson e Siegel (1987) sobre as TJ pode ser avaliada através da leitura dos  $R^2$  ou coeficiente de determinação para cada uma das regressões estimadas.

**TABELA 6. SÍNTESE DOS COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO**

<b><math>R^2</math></b>	<b>Média</b>	<b>Mediana</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Desvio Padrão</b>
<b>Modelo de 2 Fatores</b>	0,840	0,940	0,000	0,999	0,222
<b>Modelo de 3 Fatores</b>	0,918	0,989	0,0307	0,999	0,182
<b>Modelo de 4 Fatores</b>	0,981	0,995	0,545	0,999	0,048

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 7. RACIO (NÚMERO DE  $R^2$ / TOTAL DAS OBSERVAÇÕES) (EM %)**

<b>Rácio (Nº de <math>R^2</math>/ Total) em %</b>	<b><math>\geq 0,99</math></b>	<b>]0,99;0,9]</b>	<b>]0,9;0,5]</b>	<b>]0,5;0]</b>
<b>Modelo de 2 Fatores</b>	8,99	52,29	29,77	8,96
<b>Modelo de 3 Fatores</b>	46,87	38,09	9,26	5,77
<b>Modelo de 4 Fatores</b>	76,37	19,54	4,09	0,00

Fonte: Elaboração própria

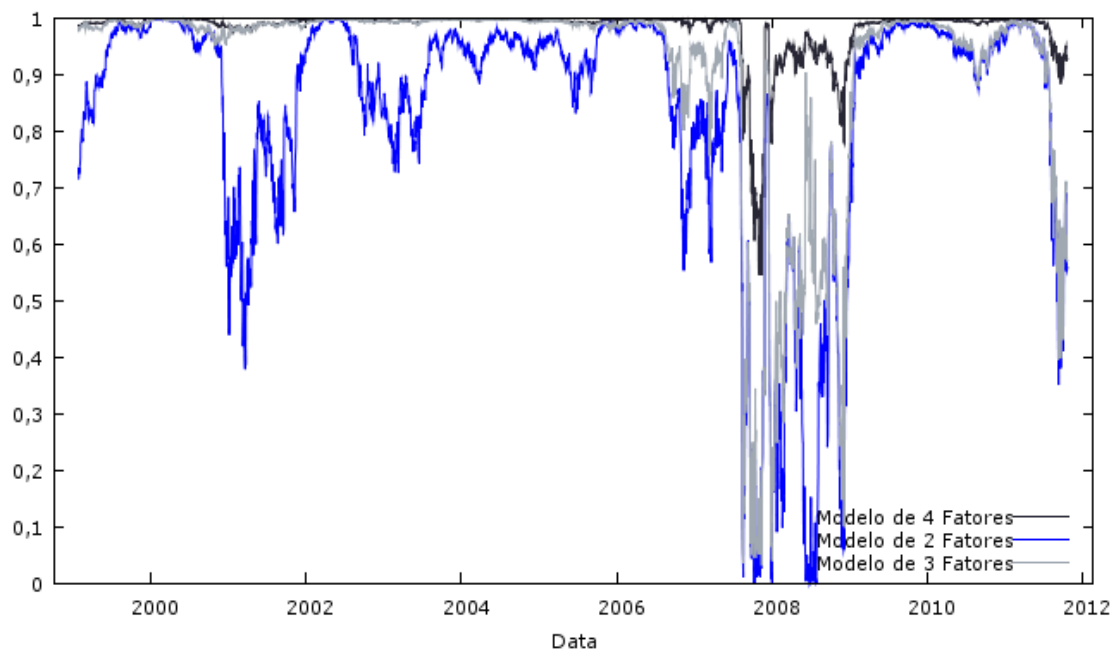
Sabemos que quanto mais próximo de 1 estiver o coeficiente de determinação melhor será o grau de ajustamento entre a variável observada e a variável estimada, isto é, entre  $y_m$  e  $\hat{y}_m$ , respetivamente. O Gráfico 3, representa os resultados obtidos através deste indicador. Verificamos que os modelos de 3 e 4 fatores, em períodos de estabilidade

económica e financeira, são capazes de capturar os ajustamentos das TJ com elevada qualidade, conseguindo, assim, capturar as curvas das TJ quase na íntegra. No entanto, nos períodos historicamente marcados por instabilidade nos mercados financeiros, todos os modelos perdem, consideravelmente, qualidade nos ajustamentos. O modelo de 2 fatores demonstra ser, claramente, incapaz de capturar as diversas formas que a *yield curve* pode assumir ao longo de todo o período histórico que estamos a analisar. Isto é, tanto em alguns períodos de estabilidade, como em períodos críticos, os resultados não são encorajadores para a sua aplicação.

Em termos percentuais, podemos salientar que o modelo de 3 e 4 fatores têm 46,87% e 76,37%, respetivamente, regressões estimadas com coeficientes de determinação bastante elevados, isto é, superiores a 0,99. Estes resultados indicam que o modelo de 4 fatores, em mais de metade dos ajustamentos revelou resultados com qualidade muito próxima de 100%.

A acrescentar a esta leitura, salientamos que a outra grande parte dos ajustamentos produzidos pelo modelo de Björk e Christensen (1999) têm qualidades compreendidas entre 0,99 e 0,90.

**GRÁFICO 3. COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO 25/01/1999-24/10/2011**



Fonte: Elaboração própria

As regressões entendidas como fracas e muito fracas, em que consideramos como ajustamentos fracos e muito fracos os que correspondem a regressões com  $R^2$  inferiores a 0,5, representam 5,77% no modelo de Diebold e Li (2006) e 0% no modelo de 4 fatores, sobre o total da amostra,. O modelo de 2 fatores tem mais observações fracas e muito fracas quando comparado com os outros dois modelos, representado, aproximadamente, 9% do total da amostra.

O período que agrupa um maior número de coeficientes de determinação baixos em todos os modelos corresponde aos anos de 2007, 2008 e 2009, seguindo-se 2010 e, por fim, observa-se perda de qualidade, apesar de não ser tão significativa, para os ajustamentos em torno de 2001/ 2002. Estes resultados demonstram elevado interesse no nosso estudo na medida em que demonstram a capacidade dos modelos de 3 e 4 fatores revelarem, através da qualidade dos ajustamentos das TJ, resultados satisfatório na réplica das TJ observadas ao longo de períodos estáveis, perdendo qualidade, um mais que o outro, em períodos marcados por crises financeiras a nível mundial.

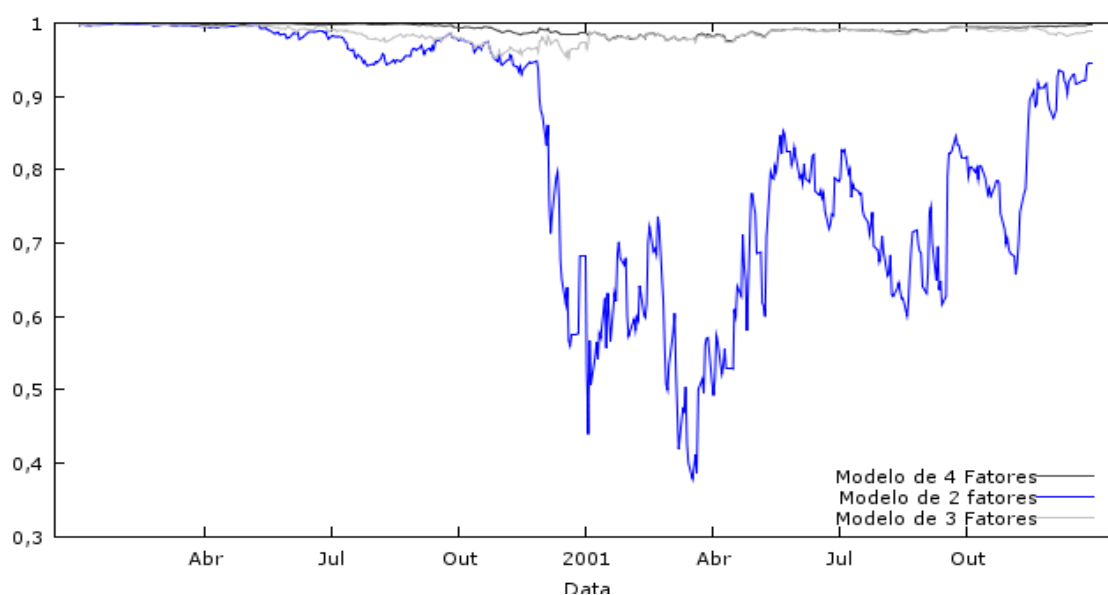
Segundo (Soros 2008) a crise do *subprime* foi a pior crise financeira desde os anos 30, acrescentando que foi um culminar de um supre crescimento que já durava á mais de 25 anos. O autor refere que a crise hipotecária teve como origem na bolha da internet do final de 2000, em que as TJ praticadas passaram de 6,5% para 3,5%. O autor relembra, também, o impacto dos ataques terroristas de 11 de setembro de 2001 nos EUA que impulsionaram a queda das TJ para os valores mais baixos dos últimos 50 anos, atingindo 1%.

Estes dois acontecimentos (a bolha da internet e o ataque de 11 de setembro de 2001), provocaram volatilidade nos mercados financeiros e monetários, e, sobretudo, mais uma crise de confiança por parte dos investidores nas “empresas.com”. As ações das empresas tecnológicas caíram a ritmos exponenciais, originando processos de venda e fusão de muitas das mesmas. Estes acontecimentos também são sentidos nos dados estimados para a Zona Euro, coincidindo com a perda de qualidade para os ajustamentos efetuados pelos modelos de Nelson e Siegel (1987). Após a crise da bolha da internet, em 2007, começaram-se a fazer sentir os primeiros sintomas do colapso financeiro da crise do *subprime* e, mais recentemente, 2010 ficou marcado pelo início da crise da dívida pública da Zona Euro.

No que se refere á crise do *subprime*, os primeiros sintomas deste colapso financeiro fizeram-se sentir em meados de 2007 quando, entre outros marcos importantes, o Banco francês *BNP Paribas* aumentou fortemente o custo de crédito, transmitindo a nível mundial a mensagem de gravidade do estado em que o sistema financeiro se encontrava. Para além disso, grandes bancos emissores de hipotecas *subprime*, como é o caso do *New Century Financial*, declararam falência e perdas catastróficas.

No início de 2008, os maiores bancos Americanos e Europeus reconheceram perdas de bilhões de dólares com ativos associados a hipotecas.

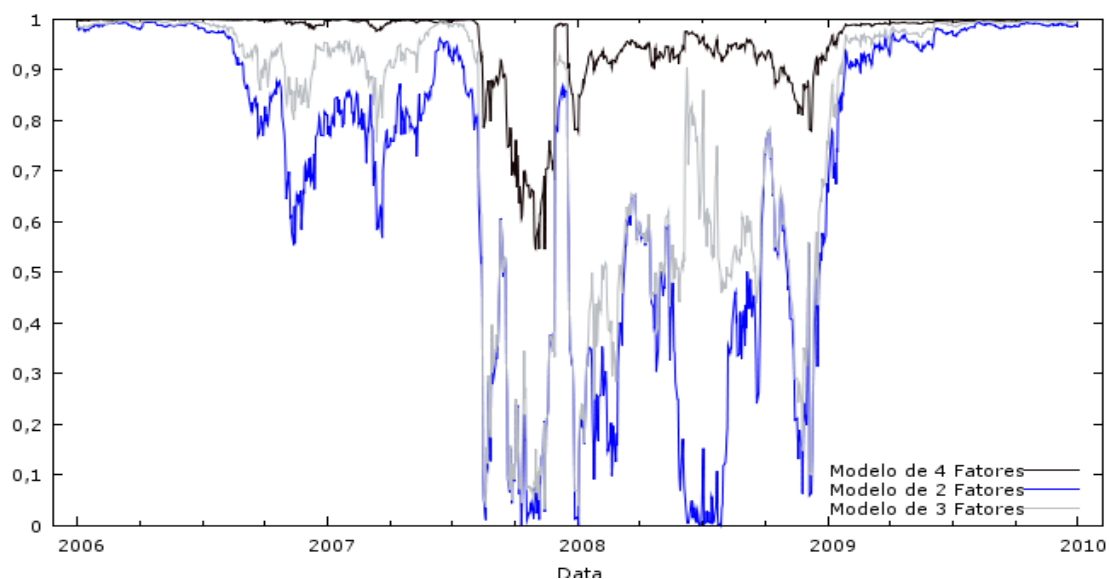
**GRÁFICO 4.** COEFICIENTE DE DETERMINAÇÃO 2000:1 – 2002:12



Fonte: Elaboração própria

Os mercados, impulsionados pelo contágio de uma das maiores crises financeiras e económicas até então sentidas, atravessaram períodos de elevada incerteza quanto ao desenvolvimento económico mundial, refletindo-se na turbulência sentida nos mesmos.

**GRÁFICO 5. COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO 2006:1 – 2009:12**



Fonte: Elaboração própria

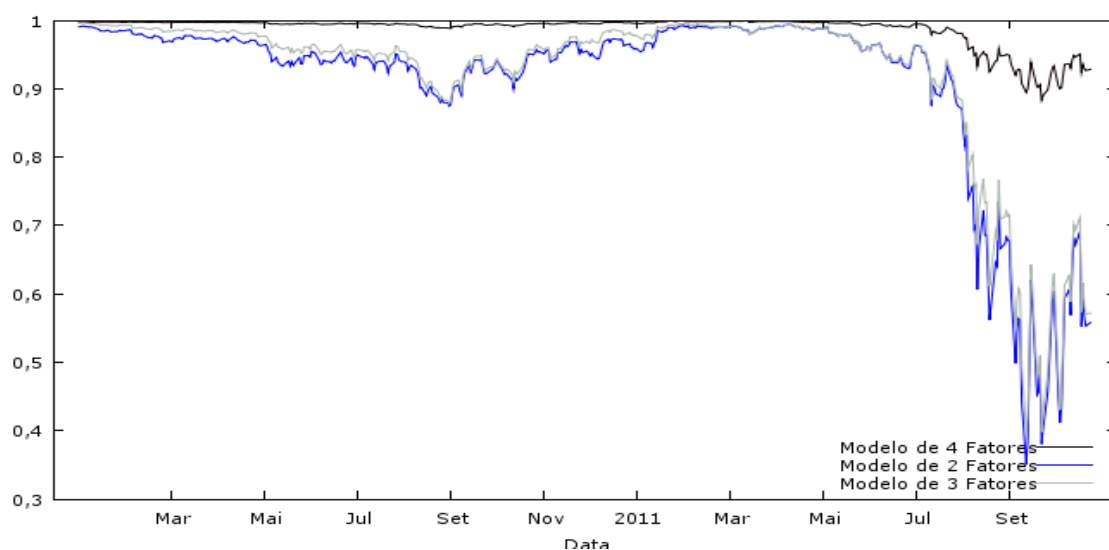
Em 15 de Setembro de 2008, um dos maiores bancos de investimentos dos EUA, *Lehman Brothers*, declara falência dado os prejuízos causados pelo *subprime*, provocando uma grande intensidade de propagação à escala global, com grande ênfase na Europa, provindo das relações interbancárias.

Pouco tempo depois, em 6 de Novembro de 2008, o Fundo Monetário Internacional, o Banco de Inglaterra e o Banco Central Europeu reforçaram medidas para impulsionar o crescimento económico. O Banco de Inglaterra cortou as TJ de 4,5% para 3% (para o menor nível desde 1955), em paralelo, o Banco Central Europeu reduziu as TJ de 3,75% para 3,25%. Posteriormente, em 14 de Novembro de 2008, a Zona Euro oficializa a recessão económica de 0,2% no terceiro trimestre do ano em apreço.

É realizada uma reunião do G20 com o intuito de conter a crise financeira e acordar reformas de longo prazo. Em torno destas datas, a evolução dos mercados refletiram momentos de grandes incertezas, promovendo as dúvidas sentidas quanto ao futuro da União Europeia e incorporando o reflexo das medidas tomadas pelos governos, instituições financeiras, agências de *rating*, entre outras medidas e acontecimentos até então verificados. As expectativas revelaram-se controversas e tal comportamento é visualizado na menor capacidade do modelo em estimar ajustamentos com qualidade para períodos de elevada volatilidade e choques económicos.

Torna-se importante, também, ver que os modelos, a partir de Agosto de 2011, começam a apresentar coeficientes de determinação mais baixos (apesar de serem mais fortes, em média, do que quando comparado com o período *subprime*). Em 2011 o efeito da crise da dívida pública na Zona Euro é sentida com maior amplitude, levando o Banco Central Europeu a tomar medidas de intervenção, como por exemplo a compra de dívida pública e a alteração das TJ de curto prazo, com o fim de conter a subida das *yields* face aos receios de contágio bem como os sucessivos cortes de *rating* a países da Zona Euro.

**GRÁFICO 6. COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO 2010:1 – 24/10/2011**



Fonte: Elaboração própria

Os Gráficos 4, 5 e 6 permitem observar, claramente, o desempenho de cada um dos modelos em contextos de crises financeiras. Verificamos que nos períodos estáveis, os 3 modelos mostram-se capazes de replicar as TJ do mercado. No entanto, quando se começa a sentir algum tipo de volatilidade, mesmo que pouca (como é o caso da crise tecnológica), o modelo de 2 fatores perde qualidade significativa quando comparado com os restantes modelos em que, nestes casos, o modelo de 4 fatores continua a replicar as *yield curves* quase na íntegra e o modelo de 3 fatores perde alguma qualidade mas pouco evidente. Em períodos excessivamente turbulentos (crise hipotecária) vemos que o modelo de 2 fatores falha distintamente, o modelo de 3 fatores também perde qualidade excessiva, apresentando resultados com melhor qualidade que o modelo de menos fatores mas com evidente pior qualidade que o modelo de 4 fatores. Por fim, verificamos que no início da crise soberana na Zona Euro os modelos com 3 e 2 fatores

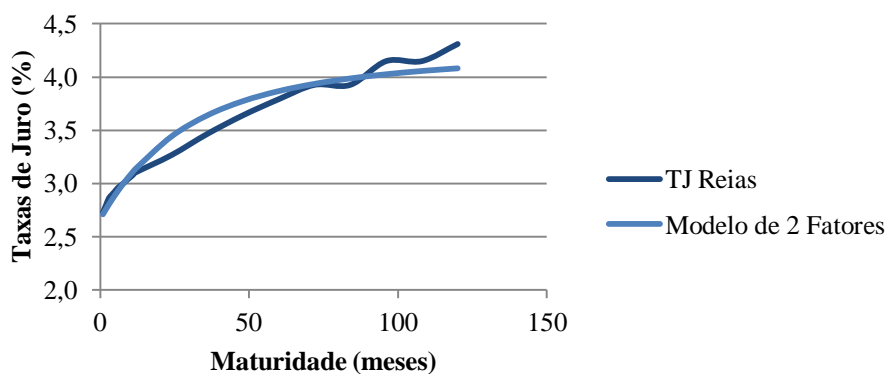
voltam a perder bastante qualidade, não conseguindo capturar a volatilidade das TJ do mercado, em contrapartida, o modelo de 4 fatores perde capacidade de ajuste mas de forma muito menos expressiva.

Dito isto, no que se refere à comparação dos ajustamentos efetuados pelos três modelos que estamos a estudar, os resultados dos coeficientes de determinação para as TJ ajustadas revelam, nitidamente, que o modelo de 4 fatores produz os melhores resultados e que o modelo de 2 fatores é o que apresenta resultados menos satisfatórios. O modelo de 2 fatores, em períodos de instabilidade nos mercados apresenta valores muito baixos enquanto os modelos com mais de 2 fatores melhoram significativamente a qualidade dos ajustamentos. Estes resultados vêm demonstrar que o modelo de 4 fatores, mesmo em períodos de alguma turbulência nos mercados financeiros, consegue efetuar ajustamentos muito próximos dos historicamente observados. Após a estimação dos coeficientes de regressão, podemos determinar as *yield curves* ajustadas por cada um dos modelos. Começamos por comparar a curva média de rendimentos efetivamente observada com a ajustada por cada um dos modelos estimados.

Os Gráficos 7, 8 e 9, representam a comparação das *yield curves* médias (isto é, as 3326 curvas de rendimentos diárias que compõem a nossa amostra) com as *yield curves* médias das TJ ajustadas através dos modelos de 2, 3 e 4 fatores.

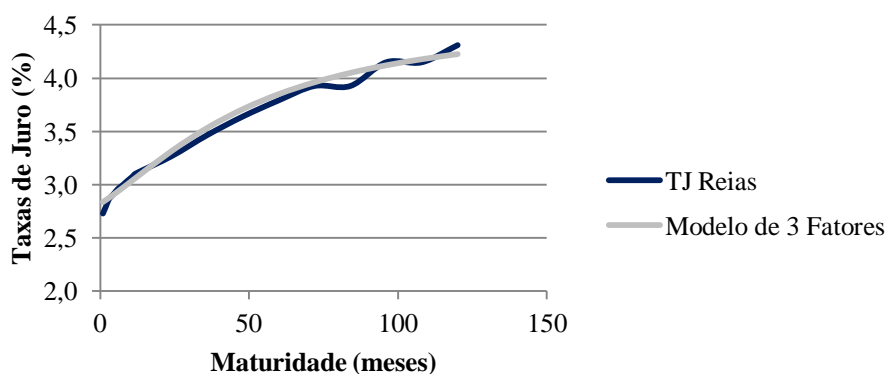
Conseguimos aferir quanto à razoabilidade dos modelos de Diebold e Li (2006) e Björk e Christensen (1999) em capturar o formato médio das *yields curves*, o que não acontece com o modelo de 2 fatores. O modelo com apenas dois fatores revela-se, claramente, insuficiente na captação da mesma pois quando observamos a representação gráfica deste modelo nota-se um grande diferencial face à média das curvas de rendimentos históricas.

**GRÁFICO 7. YIELD CURVE MÉDIA DAS TJ REAIS VS. YIELD CURVE MÉDIA DO MODELO DE 2 FATORES**



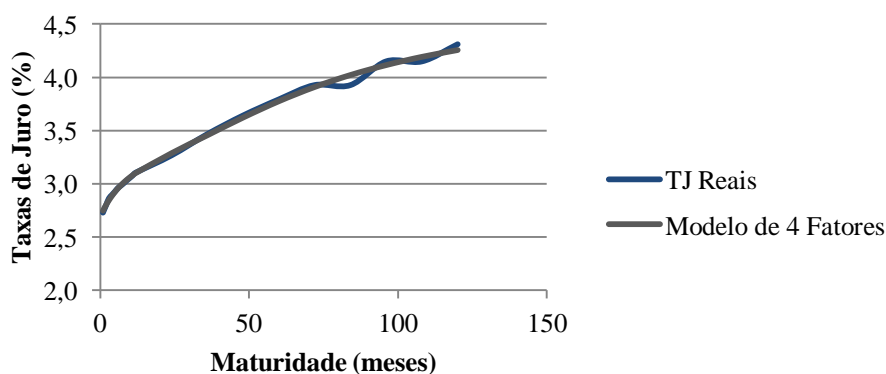
Fonte: Elaboração própria

**GRÁFICO 8. YIELD CURVE MÉDIA DAS TJ REAIS VS. YIELD CURVE MÉDIA DO MODELO DE 3 FATORES**



Fonte: Elaboração própria

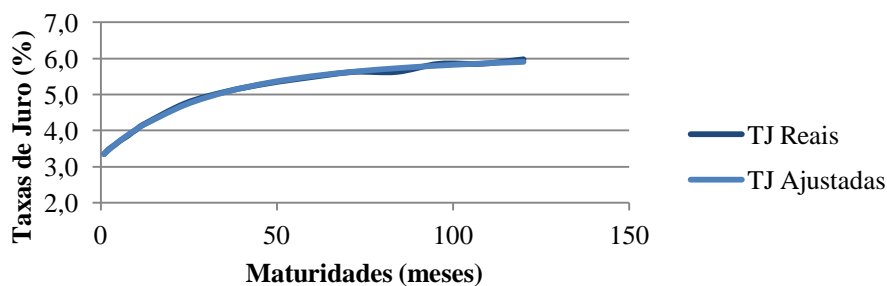
**GRÁFICO 9. YIELD CURVE MÉDIA DAS TJ REAIS VS. YIELD CURVE MÉDIA DO MODELO DE 4 FATORES**



Fonte: Elaboração própria

Os próximos gráficos ilustram a curva de rendimentos correspondente ao coeficiente de determinação mais alto de cada um dos modelos de Nelson e Siegel (1987). Isto é, a curva de rendimentos com o melhor ajustamento produzido pelos modelos e comparamos com a *yield curve* efetiva da data a que esse ajustamento corresponde. Os ajustamentos de maior qualidade, nos três modelos, pertencem ao ano 2000. Como se pode ver na leitura do Gráfico 3, os três modelos apresentam coeficientes de determinação elevados durante esse ano, isto deve-se ao facto de se tratar de período estável nos mercados financeiros e económicos, em que as curvas de rendimentos apresentam a inclinação típica de estabilidade. Complementarmente, nos Gráficos 13, 14 e 15, mostramos a análise das curvas de rendimentos correspondentes ao coeficiente de determinação mais fraco. Em todos os modelos, os piores ajustamentos, referem-se ao período da crise do *subprime*. Sobressai o ajustamento mais fraco produzido pelo modelo de 4 fatores. Apesar de ser o ajustamento que mais se afasta da curva de rendimentos efetiva, ainda consegue capturar a curvatura da *yield curve*, o que vem demonstrar que este modelo apresenta maior capacidade de estimar as TJ para a Zona Euro. Também é importante realçar que a curva de rendimentos com pior ajustamento, tanto para o modelo de Diebold e Li (2006) como para o modelo de Björk e Christensen (1999), corresponde a 14 de Novembro de 2007, dia em que é comunicada a obrigatoriedade de, partir de 15 de Novembro de 2007, todas as instituições financeiras dos EUA exporem os seus ativos e passivos financeiros (mensurados ao justo valor), de uma forma padronizada, nas suas Demonstrações Financeiras, (FASB 2007). Esta medida é implementada em consequência das perdas catastróficas anunciadas pelo setor financeiro durante 2007.

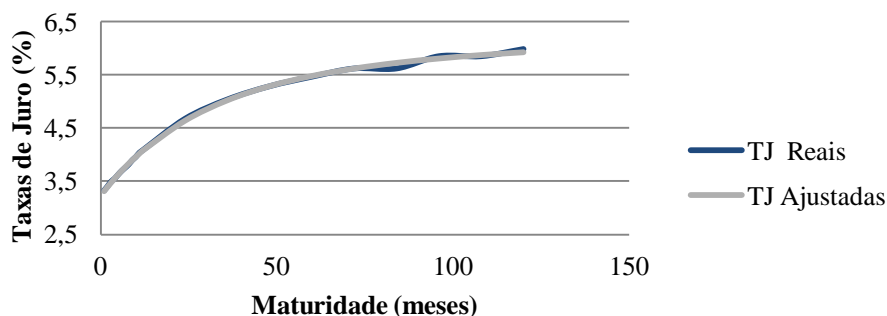
**GRÁFICO 10. YIELD CURVE COM MELHOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 2 FATORES (18/02/2000)**



$R^2 = 0,9987$

Fonte: Elaboração própria

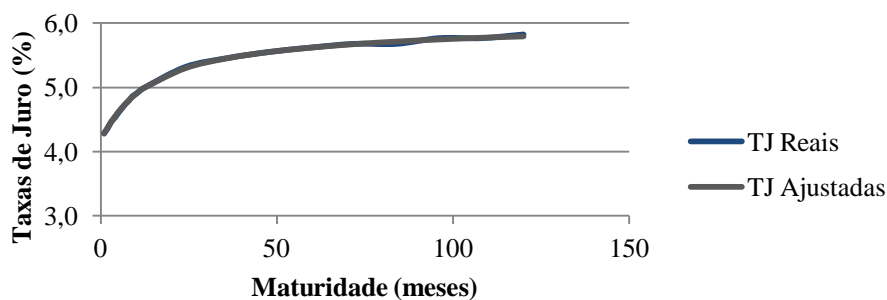
**GRÁFICO 11. YIELD CURVE COM MELHOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 3 FATORES (14/02/2000)**



$R^2 = 0,9989$

Fonte: Elaboração própria

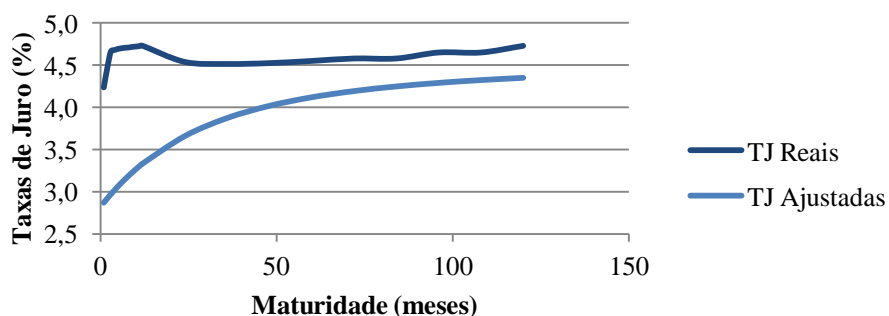
**GRÁFICO 12. YIELD CURVE COM MELHOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 4 FATORES (01/06/2000)**



$R^2 = 0,9993$

Fonte: Elaboração própria

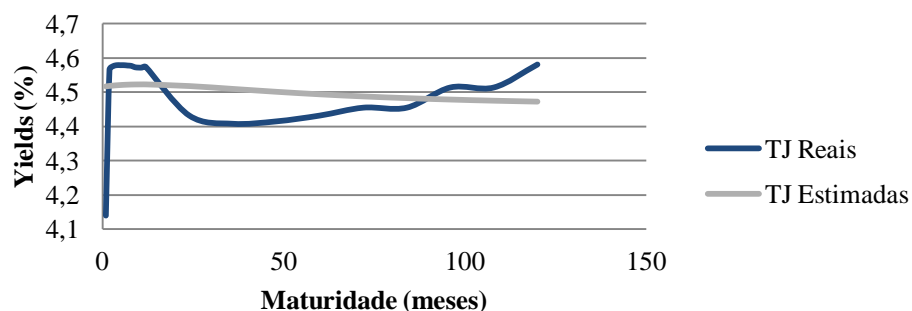
**GRÁFICO 13. YIELD CURVE COM PIOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 2 FATORES (02/01/2008)**



$R^2 = 0,000$

Fonte: Elaboração própria

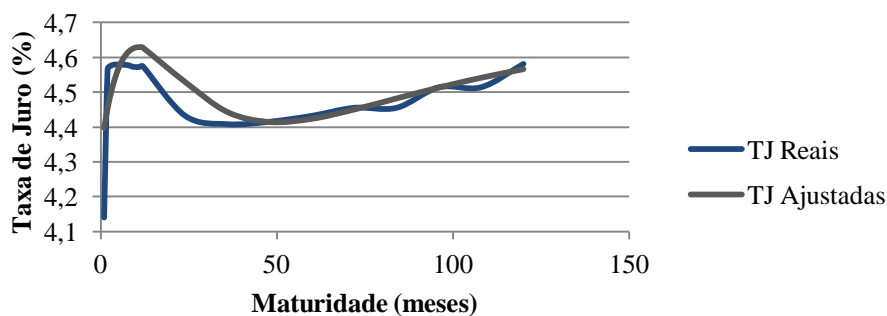
**GRÁFICO 14. YIELD CURVE COM PIOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 3 FATORES (14/11/2007)**



$R^2 = 0,0307$

Fonte: Elaboração própria

**GRÁFICO 15. YIELD CURVE COM PIOR AJUSTAMENTO – MODELO DE 4 FATORES (14/11/2007)**



$R^2 = 0,5448$

Fonte: Elaboração própria

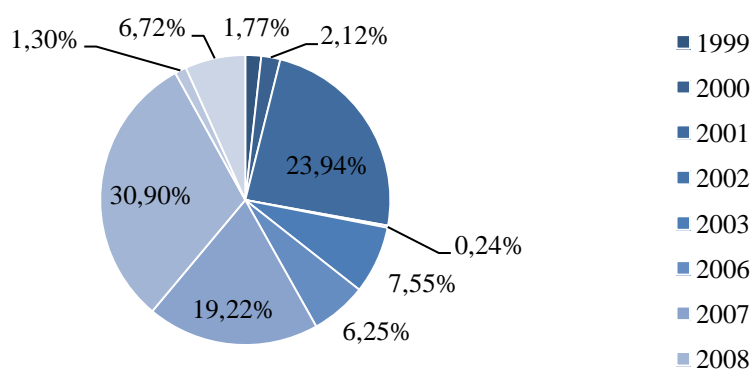
Em seguida, fomos averiguar em que anos correspondem os ajustamentos mais insatisfatórios de toda a amostra para cada um dos modelos. Neste procedimento consideramos como ajustamentos insatisfatórios todos os que apresentam coeficientes de determinação iguais ou inferiores a 0,80, achamos este limite o mais conveniente pois os ajustamentos inferiores a 0,80, para o tipo de dados que estamos a trabalhar (TJ), deixam de ser coerentes.

**TABELA 8. PESO DOS COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO IGUAL OU INFERIOR A 0,80 NO TOTAL DA AMOSTRA POR MODELO**

Modelo	N.º de $R^2 \leq 0,8$ / Total da Amostra (em %)
2 Fatores	25,50
3 Fatores	12,42
4 Fatores	1,83

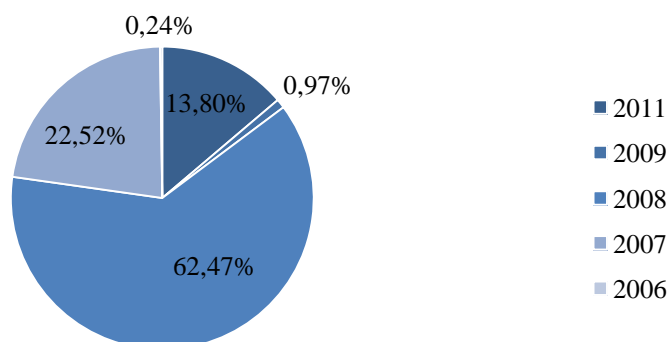
Fonte: Elaboração própria

**GRÁFICO 16. DISTRIBUIÇÃO DOS  $R^2 \leq 0,8$  - MODELO DE 2 FATORES**



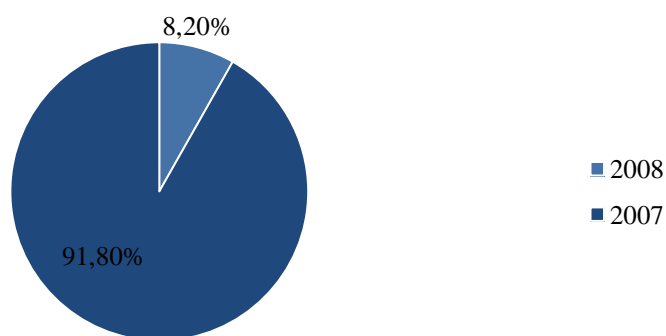
Fonte: Elaboração própria

**GRÁFICO 17. DISTRIBUIÇÃO DOS  $R^2 \leq 0,8$  - MODELO DE 3 FATORES**



Fonte: Elaboração própria

## GRÁFICO 18. DISTRIBUIÇÃO DOS $R^2 \leq 0,8$ - MODELO DE 4 FATORES



Fonte: Elaboração própria

Nos três modelos, a grande parte dos ajustamentos fracos correspondem à crise hipotecária de 2007/ 2008, sendo que para o modelo de 4 fatores, todos os ajustamentos inferiores a 0,8 pertencem a esse período. No modelo de 2 fatores os ajustamentos fracos estão mais dispersos e a grande fatia corresponde não só a crise do *subprime* como também ao período da bolha da internet (2001).

### 5.4 MODELIZAÇÃO DA YIELD CURVE: ANTES E APÓS A CRISE FINANCEIRA DE 2007/08

Após a análise da qualidade dos ajustamentos efetuados através da estimação dos modelos de Nelson e Siegel (1987) e de termos apreciado o impacto da crise financeira de 2007/ 2008 na perda de qualidade dos ajustamentos, achamos de interesse efetuar a análise dos modelos em duas fases, isto é, excluindo o período da crise do *subprime*. Assim, iremos dividir a nossa amostra da seguinte forma: a) análise dos ajustamentos antes da crise do *subprime* e b) análise após a crise do *subprime*, para as observações da amostra que antecedem e sucedem a crise financeira de 2007/08<sup>7</sup>, respetivamente.

A escolha por fazer esta divisão, não incluindo os dois anos de que refletem maior turbulência nos mercados, tem como fim estudar a qualidade das estimações sem os períodos que reduzem, consideravelmente, a qualidade dos resultados e evidenciar o impacto que os períodos de grande volatilidade provocam na estimação da ETTJ.

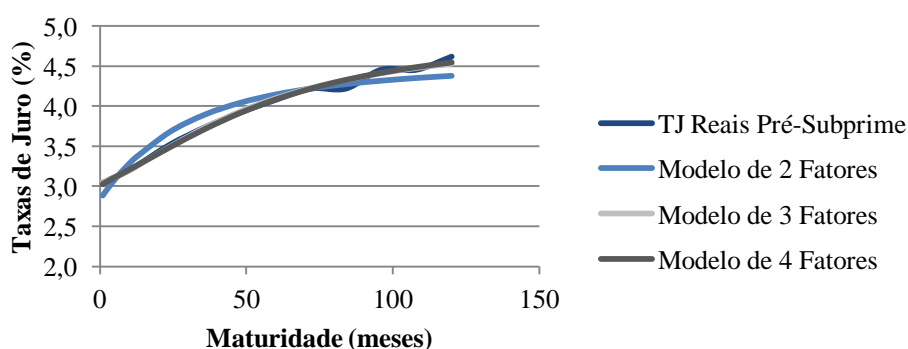
---

<sup>7</sup> Período anterior à crise de 2008: Pré *Subprime*: 25 de Janeiro de 1999 até 29 de Dezembro de 2006;  
Período após a crise de 2008: Pós *Subprime*: 1 de Janeiro de 2009 até 24 de Outubro de 2011;

Os dados obtidos, como seria de se esperar, revelam-se encorajadores em ambas as subamostras. No entanto, é importante referir que, conhecida a nossa base de dados original, a análise para o período antes da crise do *subprime* contem, logicamente, mais observações históricas quando comparado com a subamostra após a crise do *subprime*.

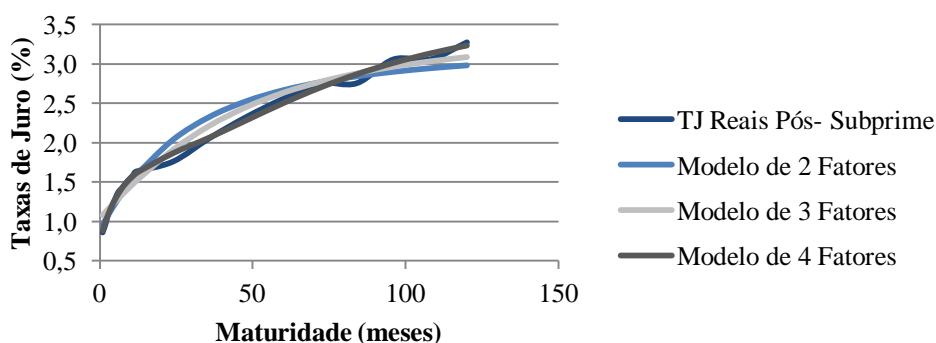
A observação dos Gráficos 19 e 20 permite-nos ver a representação gráfica da média da ETTJ históricas paralelamente com a média da ETTJ ajustada por cada um dos modelos antes e após a crise financeira de 2008. Os modelos de Björk e Christensen (1999) e de Diebold e Li (2006) são os que mais se aproximam da média das TJ reais, em que a curva média de rendimentos ajustada pelos dois modelos no período anterior ao *subprime* estão sobrepostas quase na íntegra. O mesmo não acontece no período após o *subprime*, para a fase posterior à crise financeira de 2008 o modelo de Diebold e Li (2006) produz ajustamentos, em média, de qualidade inferior do que o modelo de 4 fatores, consequência do impacto da crise do Euro e da incerteza provocada pela mesma na economia. Estas representações gráficas sugerem que tanto o modelo de 3 e de 4 fatores são modelos encorajadores para representar períodos com pouca volatilidade e turbulência mas que o modelo com 3 fatores perde qualidade nos ajustamentos de forma mais notória do que o modelo com um fator a mais. No que se refere ao modelo com 2 fatores, a evidência de que este é insuficiente para produzir ajustamentos de boa qualidade mantém-se.

**GRÁFICO 19. YIELD CURVE MÉDIA – ANTES DA CRISE DO *SUBPRIME***



Fonte: Elaboração própria

**GRÁFICO 20. YIELD CURVE MÉDIA – APÓS A CRISE DO *SUBPRIME***



Fonte: Elaboração própria

**TABELA 9. COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO (EM %) – ANTES DA CRISE DO *SUBPRIME***

Modelo	$\geq 0,99$	$]0,99;0,9]$	$]0,9;0,5]$	$]0,5;0]$
2 Fatores	11,26	55,27	32,80	0,68
3 Fatores	64,88	33,33	1,79	0
4 Fatores	87,44	12,56	0	0

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 10. COEFICIENTES DE DETERMINAÇÃO (EM %) – APÓS A CRISE DO *SUBPRIME***

Modelo	$\geq 0,99$	$]0,99;0,9]$	$]0,9;0,5]$	$]0,5;0]$
2 Fatores	9,00	76,94	12,14	1,91
3 Fatores	28,10	59,89	10,50	1,50
4 Fatores	80,63	18,69	0,68	0

Fonte: Elaboração própria

É visível que os coeficientes de determinação apresentam maior qualidade no período anterior ao *subprime*. Os resultados deste indicador demonstram, claramente, o impacto que as crises financeiras de grande dimensão têm sobre a qualidade dos ajustamentos efetuados. O facto de termos analisado os resultados sem o período de 2007 a 2008, inclusive, melhorou significativamente, em termos percentuais a distribuição dos coeficientes de determinação. No que se refere aos ajustamentos após o *subprime* verificamos que existe uma maior quantidade de ajustamentos compreendidos entre a 0,5 e 0. Fomos analisar, para cada modelo, todos os coeficientes de determinação inferiores a 0,8 com o fim de ver a que anos pertencem. Constatamos que para o modelo

de 2 fatores, existem 103 observações inferiores a 0,8 e que, aproximadamente, 66% correspondem a 2011. No modelo de Diebold e Li (2006) (para 88 observações) e no de Björk e Christensen (1999) (5 observações), 72,73% e 100%, respetivamente, também correspondem a 2011. Isto leva-nos a lembrar o impacto da atual crise da Zona Euro e da dívida pública, das recentes incertezas quanto ao crescimento da economia na Europeia e, conseqüentemente, das intervenções do Banco Central Europeu nas políticas monetárias.

## 5.5 PREVISÃO DA ESTRUTURA TEMPORAL DAS TAXAS DE JURO

Como vimos na secção anterior, os ajustamentos da ETTJ efetuadas com base no modelo de Björk e Christensen (1999) foram as que revelaram resultados com maior qualidade. No entanto, é preciso ter em atenção que o facto de um modelo revelar bom desempenho nos ajustamentos não é condição necessária para que este revele bons resultados nas previsões devido ao risco de *overfitting*, Pooter (2007). No nosso estudo, tal como efetuamos para os ajustamentos, vamos efetuar as previsões das TJ com base nos mesmos modelos de 2, 3 e 4 fatores com o fim de concluir qual é o que produz melhores resultados.

Diebold e Li (2006), bem como grande parte dos autores, optaram por efetuar as previsões dos coeficientes dos modelos que estudaram. Assim, em linha com a literatura relevante, efetuamos as previsões com base nesse procedimento e, complementarmente, sugerimos uma forma alternativa de obter as previsões, efetuando-as sobre as TJ ajustadas pelos modelos. Este procedimento alternativo consiste em ajustar os fatores, período a período, modelizando a evolução das TJ ao longo do tempo em que a dinamização está nas TJ propriamente ditas e não nos coeficientes dos modelos.

As previsões efetuadas, tanto para os coeficientes como para as TJ ajustadas, foram realizadas para diferentes horizontes temporais com base num processo univariado AR, tal como Diebold e Li (2006) efetuaram para os coeficientes nível, inclinação e curvatura. O modelo AR foi estimado com base no método dos MQO. As previsões *out-of-sample*, foram realizadas diariamente para horizontes temporais mensais, trimestrais, semestrais e anuais, correspondendo a 24, 86, 129 e 262 desfasamentos ( $h$ ) / dias úteis médios, respetivamente. Os dados históricos considerados, no primeiro passo do processo, foram as observações diárias desde o início da nossa amostra, isto é, de  $t_1$  (25/01/1999) até  $t_{768}$  (31/12/2002), em seguida, num segundo passo, efetuamos desde

$t_1$  até  $t_{768+1}$ , e assim, sucessivamente até ao final da amostra em função dos horizontes temporais considerados para efeitos de previsão.

Com o fim de avaliar a qualidade dos resultados *out-of-sample* calculamos os erros médios quadráticos (RMSE – *Root Mean Square Error*) tanto para a previsão das TJ ajustadas como, também, para a previsão dos coeficientes, com base nas TJ reais e nas TJ previstas, para 5 maturidades, presentes na nossa base de dados.

O procedimento aplicado às TJ com base nos coeficientes previsionais dos modelos de de Litterman e Scheinkman (1991), Diebold e LI (2006) e Björk e Christensen (1999) foi a seguinte:

$$\hat{\beta}_{t+h} = \mu + \phi_1(\hat{\beta}_t - \mu) + \varepsilon_t \quad (25)$$

Em que  $\hat{\beta}$  são os coeficientes ajustados pelo método dos MQO e  $h$  representa o número de defasamentos considerados para efeitos de previsão,  $\mu$  representa a média de  $\beta$   $\varepsilon_t$  representa o erro estocástico do modelo AR. Do mesmo modo, a especificação para a previsão das TJ ajustadas ( $\hat{y}_{t+h}(m)$ ) podem ser descritas da seguinte forma:

$$\hat{y}_{t+h}(m) = \mu + \phi_1(\hat{y}_t(m) - \mu) + \varepsilon_t \quad (26)$$

Neste sentido, ao utilizarmos o modelo univariado AR, as TJ previsionais serão explicadas apenas com base nos seus valores históricos e correntes das TJ ajustadas e dos coeficientes estimados.

O principal objetivo da presente investigação é observar o impacto das crises financeiras nas previsões e nos ajustamentos da ETTJ. Já observamos o impacto desses períodos na capacidade dos modelos em capturarem, dentro da amostra, as diversas formas que a *yield curve* pode assumir em períodos de elevada volatilidade e tinha-mos concluído que os três modelos perdem qualidade nos ajustamentos, com diferentes amplitudes, essencialmente ao longo da crise financeira do *subprime*.

Deste modo, para analisar o impacto do período de maior volatilidade presente na nossa base de dados, começamos por analisar a qualidade de todas as previsões efetuadas, isto é, desde 2002:01 até ao final da amostra e, em seguida, repetimos este procedimento excluindo o período em que os dados começam a ser menos satisfatórios, ou seja, desde 2007:01, considerando apenas os resultados das previsões de 2002:01 até 2006:12.

Através desta análise conseguimos perceber o impacto que a presença de períodos marcados por elevada volatilidade nos mercados monetários e financeiros pode afetar os resultados das previsões das TJ. A análise da qualidade dos resultados antes da crise financeira prende-se pelo facto de, a partir desse período, as previsões estarem “contaminadas” pelos dados históricos que correspondem ao ano 2007 e 2008. Mesmo que só excluíssemos os resultados dos RMSE para os dois anos que marcam a crise hipotecária, como fizemos para os ajustamentos, iríamos continuar a ter resultados de menor qualidade pois, desde esse período para a frente as previsões passam a ser efetuadas incluindo, logicamente, os dados históricos para as datas posteriores.

Nas seguintes tabelas apresentamos os resultados das previsões efetuadas para as maturidades 3, 6, 12, 60 e 120 meses. Os RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os resultados previsionais, isto é, de 2002:1 até ao final da amostra, os RMSE b) correspondem aos resultados obtidos no período 2002:01 até 2006:12, ou seja, os que não incluem os resultados que englobam o período do *subprime*.

**TABELA 11. RMSE PARA PREVISÕES MENSAIS - COEFICIENTES**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,201	-57,3	0,086	0,237	-31,7	0,162	0,324	-32,6	0,218
<b>6</b>	0,215	-27,2	0,156	0,224	-16,8	0,186	0,343	-28,8	0,245
<b>12</b>	0,309	1,4	0,313	0,245	-8,5	0,225	0,361	-19,9	0,289
<b>60</b>	0,282	-8,0	0,260	0,264	-8,0	0,242	0,299	-9,0	0,272
<b>120</b>	0,263	0,4	0,264	0,220	-9,3	0,199	0,243	-15,5	0,205

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 12. RMSE PARA PREVISÕES TRIMESTRAIS - COEFICIENTES**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,649	-45,6	0,353	0,701	-27,8	0,506	1,020	-37,5	0,638
<b>6</b>	0,661	-29,0	0,469	0,682	-20,5	0,542	1,040	-33,6	0,691
<b>12</b>	0,720	-13,0	0,627	0,691	-13,9	0,595	1,057	-28,4	0,757
<b>60</b>	0,608	-8,7	0,555	0,606	-5,8	0,571	0,766	-17,7	0,630
<b>120</b>	0,406	-13,2	0,352	0,463	1,4	0,469	0,566	-16,1	0,475

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 13. RMSE PARA PREVISÕES SEMESTRAIS - COEFICIENTES**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,896	-40,4	0,534	0,953	-27,1	0,695	1,365	-38,0	0,846
<b>6</b>	0,897	-27,5	0,651	0,930	-20,8	0,737	1,374	-34,0	0,907
<b>12</b>	0,943	-14,4	0,808	0,936	-15,0	0,796	1,379	-29,3	0,975
<b>60</b>	0,763	-5,2	0,723	0,770	-2,5	0,750	0,967	-16,4	0,808
<b>120</b>	0,512	-8,6	0,468	0,595	5,4	0,628	0,713	-11,7	0,630

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 14. RMSE PARA PREVISÕES ANUIAS - COEFICIENTES**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	1,453	-36,0	0,930	1,542	-30,4	1,073	2,038	-40,2	1,218
<b>6</b>	1,418	-26,7	1,039	1,482	-24,6	1,117	1,998	-36,4	1,272
<b>12</b>	1,414	-16,7	1,179	1,441	-18,5	1,174	1,947	-31,9	1,326
<b>60</b>	1,032	2,6	1,058	1,033	5,1	1,086	1,284	-12,3	1,126
<b>120</b>	0,679	10,6	0,751	0,791	18,8	0,940	0,957	-1,9	0,939

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

A análise da qualidade das TJ previstas, efetuadas com base na previsão dos coeficientes dos modelos, mostram, como seria de se esperar, que a qualidade dos resultados é superior quando não incluímos os dados correspondentes à crise financeira de 2007/2008, havendo poucas exceções em que verificamos o contrário. Esses casos prevalecem, essencialmente, para as previsões de maturidades mais longas em que as variações das qualidades, entre os resultados com e sem o impacto da grande crise, tendem a diminuir com o aumento da maturidade. Uma possível explicação é o facto de as TJ de médio e longo prazo serem menos voláteis que as TJ de curto de prazo. Como já referimos na análise dos ajustamentos, sabemos que em períodos de grande turbulência existem várias intervenções, por parte das entidades competentes para efeito, nos mercados monetários deixando, assim, as TJ de curto prazo mais expostas à volatilidade. Estes resultados evidenciam que as previsões das TJ através da previsão dos coeficientes dos modelos não revelam resultados suficientemente satisfatórios quando começamos a aumentar os horizontes temporais de previsão. As previsões das TJ com base nos coeficientes só conseguem ser aceitáveis para previsões mensais, em que o modelo de 2 fatores, ao contrário do que aconteceu quando procedemos ao ajustamento da ETTJ, é o modelo que consegue originar, maioritariamente, resultados com melhor qualidade. O modelo de 4 fatores, neste procedimento falha nitidamente o que pode revelar *overfitting* nos ajustamentos. Por outro lado, o modelo de Diebold e Li (2006) consegue revelar-se mais aceitável que o modelo de 2 fatores para maturidades de médio prazo, conseguindo superar a incapacidade do modelo de dois fatores em capturar a curvatura<sup>8</sup> (ou seja, as TJ referentes ao médio prazo).

---

<sup>8</sup> Uma leitura atenta dos RMSE a) e RMSE b) entre os modelos de 2 e 3 fatores para a maturidade de médio prazo (12 meses), em todos os desfasamentos considerados, mostra que o modelo de 3 fatores revela resultados claramente com maior qualidade do que o modelo de 2 fatores.

**TABELA 15. RMSE PARA PREVISÕES MENS AIS - TJ AJUSTADAS**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,209	-35,1	0,136	0,207	-56,9	0,089	0,198	-52,1	0,095
<b>6</b>	0,198	-42,5	0,114	0,199	-42,1	0,115	0,202	-46,0	0,109
<b>12</b>	0,267	-6,8	0,249	0,218	-25,7	0,162	0,210	-27,0	0,153
<b>60</b>	0,266	-8,8	0,243	0,249	-12,8	0,217	0,228	-3,6	0,220
<b>120</b>	0,274	0,8	0,277	0,217	-11,6	0,191	0,205	-9,3	0,186

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 16. RMSE PARA PREVISÕES TRIMESTRAIS - TJ AJUSTADAS**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,615	-55,3	0,275	0,618	-54,1	0,283	0,604	-52,0	0,290
<b>6</b>	0,604	-45,7	0,328	0,604	-45,7	0,328	0,615	-47,9	0,321
<b>12</b>	0,634	-26,5	0,466	0,613	-33,2	0,409	0,627	-36,7	0,397
<b>60</b>	0,569	-10,5	0,509	0,554	-14,0	0,476	0,533	-9,4	0,483
<b>120</b>	0,414	-12,9	0,360	0,432	-4,4	0,413	0,441	-8,6	0,403

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 17. RMSE PARA PREVISÕES SEMESTRAIS - TJ AJUSTADAS**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	0,862	-53,2	0,403	0,856	-51,6	0,414	0,841	-49,7	0,423
<b>6</b>	0,840	-44,2	0,469	0,840	-44,3	0,468	0,855	-45,5	0,466
<b>12</b>	0,855	-28,4	0,612	0,846	-33,4	0,564	0,867	-35,5	0,559
<b>60</b>	0,716	-6,8	0,667	0,700	-9,7	0,632	0,699	-3,1	0,677
<b>120</b>	0,514	-9,3	0,466	0,554	0,3	0,556	0,604	4,3	0,630

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

**TABELA 18. RMSE PARA PREVISÕES ANUAIS - TJ AJUSTADAS**

Modelo	2 Fatores			3 Fatores			4 Fatores		
	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)	RMSE a)	$\Delta\%$	RMSE b)
<b>3</b>	1,483	-48,0	0,771	1,473	-47,9	0,767	1,451	-46,8	0,772
<b>6</b>	1,410	-40,2	0,844	1,408	-40,5	0,837	1,428	-41,9	0,830
<b>12</b>	1,362	-28,1	0,979	1,352	-30,0	0,946	1,381	-32,7	0,930
<b>60</b>	0,952	4,8	0,998	0,931	3,0	0,959	0,903	6,0	0,957
<b>120</b>	0,655	12,5	0,737	0,735	18,1	0,868	0,752	13,7	0,855

Nota: RMSE a) referem-se aos calculados com base em todos os dados previsionais (2002:01 – 2010:10); RMSE b) referem-se aos resultados obtidos no período de 2002:01 – 2006:12;  $\Delta\%$  é a variação dos RMSE a) e RMSE b);

Fonte: Elaboração própria

No que se refere às previsões efetuadas com base nas TJ ajustadas, tal como nas previsões efetuadas sobre os coeficientes dos modelos, é claro que os resultados para o período menos turbulento (RMSE b)) têm melhor qualidade. Conseguimos perceber, através das variações dos RMSE por maturidade, também neste procedimento, que para as maturidades de curto prazo a presença de grandes crises financeiras nas observações históricas fazem com que os resultados percam qualidade de forma bastante significativa. No entanto, como vimos na análise das previsões com base nos coeficientes, conforme a maturidade vai aumentando, a presença de períodos turbulentos não revelam ter grande impacto na qualidade das previsões. Estes resultados podem ser justificados com o facto de, como já tínhamos mencionado, as TJ de longo prazo serem mais persistentes que as TJ de curto prazo e pelo facto de em períodos de recessão económica haver intervenções dos sistemas bancários, essencialmente do BCE, nos mercados monetários (isto é, nas TJ de curto prazo). Como podemos verificar, quando analisamos a qualidade das previsões efetuadas sobre as TJ ajustadas, a qualidade dos resultados são satisfatórios, essencialmente para as previsões com desfasamentos mensais, trimestrais e semestrais e maioritariamente para o modelo de 3 e 4 fatores. No entanto, o modelo de 2 fatores é preferível para as previsões com maturidades mais longas à medida que aumentamos a ordem de desfasamentos. O modelo de 4 fatores de Björk e Christensen (1999) apesar de revelar os resultados mais satisfatórios nos ajustamentos das TJ, para efeitos de previsão com base nas TJ ajustadas não se distingue do modelo de 3 fatores de Diebold e Li (2006). A média das variações entre a qualidade dos resultados entre estes dois modelos, para as maturidades 3, 6, 12, 60 e 120 meses, está muito próxima de 0%. Em suma, consideramos que o

modelo de 4 fatores, de facto, para efeitos de previsão não demonstra qualidade comparativa superior ao modelo que considera apenas um fator de inclinação. Apesar de este revelar-se satisfatório para prever a ETTJ, o fator a mais não explica a evolução das *yield curves* com maior precisão, contrariamente ao observado dentro da amostra.

Por fim, quando comparamos os processos de previsão das TJ utilizados neste trabalho, isto é, através da previsão dos coeficientes e da previsão das TJ ajustadas, chegamos à conclusão (como já foi mencionado) que as previsões revelam melhores resultados, maioritariamente, quando efetuadas com base nas TJ ajustadas. No entanto, importa referir que a melhoria dos RMSE é muito mais notória para os dados que não incorporam a crise financeira de 2007/2008 e a diferença entre a qualidade dos resultados produzidos pelos procedimentos de previsão aumenta à medida que o modelo estimado tem mais fatores. Esta conclusão evidencia que para a nossa base de dados obtemos resultados mais satisfatórios quando dinamizamos as TJ ao invés de dinamizar os coeficientes estimados.

## 6 CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

Nesta investigação apresentamos, teoricamente, as diferentes extensões dos modelos de Nelson e Siegel (1987) e optamos por testar, para efeitos de ajustamento e de previsão da ETTJ, os modelos com apenas um parâmetros de decaimento fixo. Isto porque, dentro dos modelos estudados, a literatura aponta que estes, para além de serem mais parcimoniosos, são de estimação menos complexa pois não exige algoritmos de otimização não linear nem a introdução de restrições para evitar, ou resolver, problemas de multicolineariedade.

Começamos por privilegiar um estudo das TJ de referência da Zona Euro desde a entrada em vigor do Euro até finais de 2010. Isto porque, esta amostra revelou-se ser de elevado interesse uma vez que incorpora 3 fases turbulentas nos mercados financeiros e monetários e permitiu-nos averiguar qual o impacto e amplitude dessas crises nos ajustamentos e nas previsões das TJ em cada um dos modelos testados.

Tanto para efetuar os ajustamentos, como para as previsões, optamos por testar um modelo de 2 fatores, um modelo de 3 fatores e, por fim, um de 4 fatores. Desta forma, conseguimos averiguar se a presença de um fator a mais, ou a menos, do que o originalmente proposto por Nelson e Siegel (1987) poderia melhorar, ou não, a qualidade dos resultados obtidos.

Verificamos que, no que se refere aos ajustamentos, os três modelos testados revelam-se capazes de capturar a *yield curve* típica, isto é, a que apresenta formato crescente. No entanto, quando esta começa a assumir formas menos comuns do que as observadas em períodos de estabilidade económica e financeira, o modelo de 2 fatores perde, imediatamente, capacidade de replicar as mesmas. Por outro lado, o modelo de 3 e de 4 fatores ainda conseguem produzir resultados satisfatórios, apesar de tenderem a perder qualidade com o aumento da turbulência nos mercados. Estes resultados são evidentes para o período marcado pela crise tecnológica, em que observa-se alguma instabilidade nos mercados e a perda de capacidade nos ajustamentos para os modelos de menos fatores, em que o modelo sugerido por Björk e Christensen (1999), apesar de revelar resultados menos encorajadores, ainda consegue capturar o formato das *yield curves*. Quando passamos para crises financeiras com maiores precedentes a nível mundial, como é o caso da crise hipotecária dos EUA, verificamos que todos os modelos deixam de ser satisfatórios mas com amplitudes bastante diferentes. O modelo de 2 fatores

falha, claramente, ao longo de quase todo o período compreendido entre 2007 e 2008, o modelo de 3 fatores perde qualidade significativa em torno de datas mais voláteis para o mesmo período. Ambos os modelos, de 2 e 3 fatores, chegam a apresentar coeficientes de determinação muito próximos de 0. Por outro lado, o modelo de 4 fatores, neste período, ainda consegue manter alguma consistência nos ajustamentos perdendo, contudo, qualidade mas com uma amplitude muito menos acentuada comparativamente com os restantes modelos. O mesmo acontece, com os três modelos, no início da crise da dívida soberana na Zona Euro. Em suma, no que se refere aos ajustamentos, podemos concluir que, em média, o modelo de 4 fatores melhora satisfatoriamente a replica das diversas formas que a ETTJ podem assumir ao longo do tempo e em diferentes fases do crescimento económico ao contrário dos modelos de menos fatores. No entanto, sabemos que existe sempre o risco de *overfitting*, como refere grande parte da literatura, e que assim sendo, o facto de um modelo ser bastante satisfatório dentro da amostra não garante que tenha o mesmo desempenho para efetuar previsões, pelo que fomos testar os três modelos para esse fim.

Com o objetivo de prever as TJ utilizamos dois métodos de previsão distintos, um que é privilegiado por grande parte da investigação em torno do tema que consiste em efetuar as previsões das TJ através da dinamização dos coeficientes dos modelos através de um processo AR e, alternativamente, sugerimos efetuar as previsões com base na dinamização das TJ ajustadas pelos respetivos modelos, isto é, dinamizando as TJ ajustadas propriamente ditas também com base no processo AR. Complementarmente, tal como fizemos na análise dos ajustamentos, fomos analisar o impacto das crises financeiras na previsão das TJ. No entanto, uma vez que para este processo necessitamos de ter dados históricos, optamos por analisar, apenas, o impacto da maior crise sentida na nossa amostra, a crise financeira do *subprime*. Chegamos á conclusão que a presença de elevada volatilidade distorce, consideravelmente, a qualidade dos resultados mas este efeito tende a diminuir com o aumento da maturidade, o que vai ao encontro da teoria económica e financeira, na medida em que as TJ de longo prazo (mercados de capitais) são menos voláteis que as TJ de curto prazo (mercados monetários). Concluimos, também, que quando efetuamos as previsões com base nos coeficientes dos modelos, os resultados são menos satisfatórios do que quando utilizamos o processo alternativo e que, para o primeiro caso, o modelo que revelou-se mais encorajador foi o modelo de 2 fatores, essencialmente para previsões de muito

curto e de longo prazo. Por outro lado, para as maturidades de médio prazo, o modelo de 3 fatores mostra-se mais satisfatório dado à componente curvatura que não é considerado no modelo com menor número de coeficientes. Por outro lado, ao contrário do que acontece dentro da amostra, o modelo de Björk e Christensen (1999) revela-se insatisfatório para efetuar previsões com modelação dinâmica dos coeficientes. Este resultado indica-nos que o modelo com uma parametrização a mais poderá ajustar-se excessivamente à amostra, levando à incapacidade de replicar as TJ fora da mesma quando comparado com os restantes modelos.

No que se refere aos resultados obtidos com base na previsão das TJ ajustadas consideramos que os modelos de 3 e 4 fatores são os que revelam melhor desempenho, isto é, com capacidade para efetuar previsões das ETTJ. Importa referir que, para este tipo de análise, o modelo de 4 fatores, apesar de ser satisfatório, não se destaca nitidamente como acontece dentro da amostra, em que, em média, a qualidade dos resultados obtidos por este comparativamente ao modelo de Diebold e Li (2006), é apenas semelhante.

Ao longo da elaboração desta dissertação, e face às principais conclusões e resultados obtidos, suscitaram algumas curiosidades que poderiam vir a ser temas de investigações futuras.

Sabemos que estar perante um modelo que seja capaz de reproduzir as TJ presentes nos mercados, bem como de prever a evolução das mesmas no futuro, é de grande utilidade para diversos agentes económicos. No entanto, o facto de atravessarmos períodos de incertezas quanto ao crescimento de uma dada economia, que proporciona volatilidade nos mercados, faz com que os modelos percam capacidade de produzir a informação necessária que os seus utentes necessitem para tomarem decisões suficientemente coerentes com a realidade económica e financeira. É neste sentido que considero de interesse averiguar a possibilidade da realização de uma investigação que possa desenvolver a classe de modelos de Nelson e Siegel (1987) de forma que estes sejam capazes de capturar choques económicos, através da inserção de restrições nos modelos, bem como analisar diferentes cenários económicos e financeiros, como por exemplo, eventuais intervenções do Banco Central Europeu na condução das TJ dos mercados monetários que, inevitavelmente, afetam a formação das TJ de médio e longo prazo. Esta ideia prende-se pelo facto de considerar que estes modelos poderão ser mais

privilegiados pelos agentes económicos nos períodos em que as incertezas prevalecem e o recurso a modelos auxiliares poderiam ser uma mais-valia.

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves, Carlos Francisco. 1996. *Taxas de juro : estrutura de prazos e modelos dinâmicos*. Porto: Associação da Bolsa de Derivados do Porto.
- Annaert , Jan, Anouk G.P. Claes , Marc J.K. De Ceuster, e Hairui Zhang. 2000. *Estimating the Yield Curve Using the Nelson-Siegel Model*. Universiteit Antwerpen.
- Björk, Tomas, e Bent Christensen. 1999. Interest rate dynamics and consistent forward rate curves. *Mathematical Finance*, 323-348.
- Bliss, R. 1997. Testing term structure estimation methods. *Advances in Futures and Options Research*, 9, 197-231.
- Brealey, M.A. 2007. *Princípios de Finanças Empresarias* . Mc Graw Hill.
- Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll, Jr., e Stephen A. Ross. 1985. A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica* (The Econometrics Society), 53, 385-407.
- Dai, Q., e K. Singleton. 2000. Specification analysis of affine term structure models. *Jornal of Finance* 55, 1943-1978.
- Diebold, Francis X, Monika Piazzesi, e Glenn D. Rudebusch. 2005. Modeling bond yields in finance and macroeconomics, *American Economic Review*, 77, 680-692.
- Diebold, Francis X., e Canlin Li. 2006. Forecasting the term structure of government bond yields. *Jornal of Econometrics*, 130, 337-364.
- Duffe, D., e R. Kan. (1996) A yield-factor model of interest rates.” *Mathematical Finance*, 379-406.
- Duffee, G. 2002 Term premia and interest rate forecasts in affine models. *Jornal of Finance* 57, 405-443.
- Fama, E., e R. Bliss. 1987 The information in long-maturity forward rates. *American Economic Review*, 77, 680-692.
- FASB. *Financial Accounting Standards Board (FASB)* . 14 de Novembro de 2007. <http://www.fasb.org/news/nr111407.shtml> (acedido em 21 de Maio de 2012).

- Heath, David, Robert Jarrow, e Andrew Morton. 1992. Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent. *Journal of The Econometric Society*, 60, 77-105.
- Hull, John C. 2002. 4ª Edição. *Options, Futures and Other Derivates*. Prentice Hall.
- Hull, John, e Alan White. 1990. Pricing Interest-Rate-Derivative Securities. *The Review of Financial Studies*, 3, 392-573.
- Jong, F. 2000. Times series and cross section information in affine term structure models. *Journal of Business and Economic Statistics*, 300-314.
- Litterman, Robert, e José Scheinkman. 1991. Common factors affecting bond returns. *Journal of Fixed Income*, 54-61.
- McCulloch, J. H. 1975. The tax adjusted yield curve. *Journal of Finance* 30, 811-830.
- McCulloch, J. H., e H. Kwon. 1993. U. S. term structure data, 1974 - 1991. *Working Paper Ohio State University*. 6-93.
- Nelson, Charles R., e Andrew F. Siegel. 1987. Parsimonious Modeling of Yield Curves. University of Washington e University of Chicago. *Journal of Business* 60, 473-489.
- Pooter, Michiel de. 2007 Examining the Nelson-Siegel class of term structure models. *Tinbergen Institute*.
- Santos, Francisco. 2010. Finanças – Material didático do mestrado em finanças da Unoversidade Católica Portuguesa.
- Schaefer, Stephen M. 1977. The problem with redemption yields. *Financial Analysts Journal* (CFA Institute), 33, 59-67.
- Shea, Gary S. 1985. Interest rate term structure estimation with exponential splines: A note.” *Journal of Finance*, 11, 319-325.
- Smirnov, Sergey, Alexey Zakharov, Roman Rachkov, Victor Lapshin, Vladimir Zdorovenin, e Stepan Evstratov. 2006. *Methodology for definition of risk free zero-coupon yield curve and spreads in the Eurozone*. EFFAS-European Bond Commission.

Soros, G. 2008. *O novo paradigma para os mercados financeiros - a crise de crédito de 2008 e as suas implicações*. Edições Almedina.

Svensson, L. E. O. 1994. Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994 . *NBER Working Paper*.

Svensson, Lars. 1995. Estimating forward interest rates with the extended Nelson e Siegel method. *The National Bureau of Economic Research* (Princeton University, CEPR, and NBER), 13-26.

Vasicek, O. A., e H. G. Fong. 1982. Term structure modeling using exponential splines. *Jornal of Finance*, 37, 339-348.

Vasicek, Oldrich. 1977. An equilibrium characterization of the term structure. *Jornal of Financial Economics*, 5, 177-188.