Cosmologia de A. Einstein

Introdução.

Desde os fins do século XIX que se conheciam as dificuldades da Cosmologia Newtoniana, dado que a equação de Poisson, que une o potencial de gravitação com a densidade da matéria, é uma equação de derivadas parciais (locais). A equação fundamental do campo gravítico de Newton leva-nos à seguinte inferência: — nesta equação, que se se considera um ponto central, cujo potencial não seja nulo, será necessário que no infinito seja nula a densidade da matéria. Daqui se aufere, pois, que o universo newtoniano deveria ser materialmente finito num espaço infinito.

Todavia, perante tal paradoxo, uma solução fora apresentada por Seeliger e Neumann, modificando a equação de Poisson, pela introdução dum termo, proporcional a $\varnothing$. Esta resposta matemática irá permitir uma nova interpretação, que se define numa distribuição uniforme de matéria, extendendo-se até ao infinito. Porém, o mais notável que se infere deste novo potencial, define para o sistema cósmico um não centro, que está em equilíbrio [1].

Na verdade, com a lei da gravitação de Newton, torna-se impossível obter uma representação físico-matemática, coerente do Universo, no seu conjunto, e que concorde com os mais recentes dados da Radioastronomia, a não ser que se faça introduzir um termo suplementar à referida equação.

Porém, análoga dificuldade se patenteia na Teoria da Relatividade de Einstein, porque, enquanto o tempo continua expandindo-se entre o infinito do passado e o infinito do futuro, o espaço é finito e fechado sobre ele mesmo; não sendo o espaço infinito é, contudo, sem limites.

---

[1] J. MERLEAU-PONTY — *Cosmología del siglo XX*, estudio epistemológico e histórico de las teorías de la cosmología contemporánea, versión española de J. L. Guereña, Editorial Gredos, S. A., Madrid, 1971, pág. 42.

Apesar de Einstein não pretender que as modificações na teoria de Newton sejam tomadas a sério, até porque o mesmo problema epistemológico lhe iria suceder, muito embora a teoria cosmológica de Newton seja isomórfica relativamente à de Einstein; é, sem qualquer dúvida, o — Universo de Einstein — o primeiro *modelo cosmológico* e assume-se como a primeira representação geométrica da totalidade física, que não implica uma formal contradição com os princípios e leis gerais da física, não obstante muitas e complexas objecções gnoseológicas a um tal modelo, que se constitui como o pioneiro e abre as portas a uma inovadora e creadora visão da Cosmologia Científica.

As famosas «Kosmologische Betrachtungen», onde Einstein explana as suas brilhantes ideias cosmológicas, sugerem uma harmonia entre o fim e os meios, ou seja: entre a física local e a física cósmica e finalmente entre a geometria do Universo e a filosofia do seu autor.

Com efeito, como veremos ao longo deste trabalho, a problemática das «KOSMOLOGISCHE BETRACHTUNGEN» fora ultrapassada pelo avanço da Astrofísica.

Para Einstein, por volta de 1917, a questão relativa à inércia é um problema e projecto filosófico do nosso pensador, revelando-se adverso do mecanismo e inclinado a subsumir orientações da Escolástica. Porém, esforça-se, em oposição a Descartes, (*Principes de la Philosophie*, II a, 35-37, que infere a inércia dos corpos a partir da imutabilidade divina) por excluir, e bem, dos fundamentos da ciência toda a noção teológica, indo radicar, segundo o seu esquema epistemológico, o conceito de «inércia» no âmbito da interacção fenomenal [2].

Com efeito, como a cosmologia newtoniana não era capaz de explicar a lei de Hubble-Humasson (red-shift), não sendo permitido a esta cosmologia estabelecer uma relação entre o estado dinâmico do universo e as propriedades da luz, foram, pois, um marco revolucionário, as famosas: «Kosmologische Betrachtungen»; muito embora, hoje já recuadas no tempo devido à velocidade de anos-luz que caminha a ciência astral, em virtude de ciências auxiliares, como a Análise Computacional.

[2] J. M. P. — o. c., págs. 52-53.

I. **Problema Cosmológico em A. Einstein** (Os primórdios da Cosmologia Relativista):

O primeiro trabalho cosmológico de Einstein foi uma comunicação à Academia de Ciências da Prússia, publicada com o seguinte título: «Kosmologische Betrachtungen zur Allgemeinen Relativitaetstheorie», em SITGUNGSBERICHTEN DER PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN, Berlin, 1917.

Esta teoria cosmológica não é mais do que uma aplicação e desenvolvimento da Teoria da Relatividade Geral ao problema da estrutura do universo, realizada com vista a destruir dificuldades relativas às condições de fronteira dum espaço infinito.

Em Einstein, encontramos três fases características e evolutivas, no que toca à sua concepção cosmológica.

Com efeito, supondo o espaço finito, de volume determinado e fixo, cheio de matéria, cuja densidade seria constante, ou seja: um espaço de curvatura constante que exige a curvatura positiva, só terá, para Einstein, condição de necessidade e suficiência, a lei da gravitação: $R_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, R - k\, T_{ik} = 0$. Se introduzirmos um novo termo cosmológico ou: Λ, então virá:

$$(R_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, R) + \Lambda g_{ik}\, R + k\, T_{ik} = 0.$$

Com a introdução desta constante na equação fundamental do campo gravítico, Einstein encontra uma solução para o problema cosmológico. Todavia, fixemo-nos nas palavras de Einstein, referidas na monografia de 1917, e que correspondem ao Einstein-I: «Chegado a este ponto, pus-me a investigar com a amável colaboração do matemático J. Grommer, a existência de campos gravíticos estáticos, dotados de centro de simetria e satisfazendo à condição de se desvanecerem no infinito, do modo que se indicou. Tomando os potenciais gravíticos g_{ik}, calculou-se, com base nas equações de campo da gravitação, o tensor energia da matéria T_{ik}. Chegou-se, para o sistema de estrelas fixas, à conclusão de que não são de admitir tais condições nos limites, como também recentemente o astrónomo De Sitter pôs, e muito bem, em relevo (...) Em qualquer caso, os nossos cálculos levaram-me à convicção de que não é legítimo postular condições de degenerescência dos g_{ik} no infinito espacial, tais como as que foram indicadas.

Chegada, assim, a insucesso a nossa tentativa, abrem-se-nos agora duas possibilidades:

a — Postular, como no problema dos planetas que, mediante uma escolha conveniente do sistema de referência, os g_{ik} no infinito espacial se aproximam dos valores:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

b — Abster-se completamente de estabelecer para o infinito espacial condições nos limites que pretendam ter validade geral: dar, sim, para cada caso particular, os valores especiais assumidos pelos g_{ik} na fronteira espacial do domínio considerado, à semelhança do que até agora se costumava fazer para as condições iniciais de tempo. A possibilidade de *b*) não corresponde a uma resolução do problema.

É, nesta posição, impossível de atacar, que De Sitter se coloca actualmente. (...) A possibilidade *a*) não satisfaz por várias razões. Em primeiro lugar, estas condições nos limites pressupõem uma determinada escolha de sistema referencial, e isso repugna ao espírito do princípio da relatividade. Em segundo lugar, com esta concepção renunciamos a entrar em conta com a relatividade de inércia (...) Sendo assim, a inércia seria de facto influenciada, mas não condicionada pela matéria (presente no espaço finito) (...) Como se depreende do que ficou dito, não consegui chegar a estabelecer condições nos limites para o infinito espacial. No entanto, existe ainda uma outra possibilidade sem ser aquela que nos faz cair na renúncia indicada, mencionada em *b*). Com efeito, se fosse possível considerar o Universo como um contínuo fechado nas suas dimensões espaciais, então não haveria nenhuma necessidade de condições nos limites do género das que se tem referido. No que se vai seguir, mostraremos que tanto o postulado da Relatividade Geral, como também, o facto de as velocidades das estrelas serem pequenas, são conciliáveis com essa hipótese de o Universo ser, na sua totalidade espacialmente fechado» [3].

---

[3] H. A. LORENTZ; A. EINSTEIN; H. MINKOWSKI — *O Princípio da Relatividade*, Volume 1.º de Textos Fundamentais de Física Moderna, prefácio de Manuel

Estas são as hipóteses emitidas por Einstein-I, para, assim, chegar à sua tese cosmológica: o Universo é espacialmente fechado com matéria uniformemente distribuída. Contudo, para se atingir e provar este enunciado, Einstein-I teve de proceder à generalização das equações de campo pela introdução duma constante cosmológica. Quanto a estas disposições, atendamos, com efeito, ao que se apresenta no § 3 da sua memória de 1917, isto é: «O carácter métrico do contínuo quadridimensional espaço-tempo é determinado em cada ponto pela matéria que aí se encontra e pelo estado dessa matéria. A estrutura métrica deste contínuo não pode então deixar de ser extremamente complexa, dada a irregularidade com que a matéria se distribue. (...)

O facto mais importante que a observação nos fornece acerca da distribuição da matéria é o de serem muito pequenas as velocidades das estrelas por relação à velocidade da luz (...) Poderemos começar por pôr na base dos nossos raciocínios a seguinte hipótese aproximativa: existe um sistema de coordenadas em relação ao qual a matéria se pode considerar permanentemente em repouso. Em relação a tal sistema, o tensor contravariante da energia da matéria T^{ik} terá então de acordo com: $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k$ e $T^{ik} = \sigma\, dx_i / ds\, dx_k / ds$, a forma simples:

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma \end{matrix}$$

Admitindo, porém, que o Universo se fecha sobre si próprio, torna-se plausível a hipótese de σ ser independente do local (...) Pelo que se refere ao campo gravítico, resulta da equação do ponto material:

$$d^2 x_\nu / d\sigma^2 + \left\{ {\alpha\beta \atop \nu} \right\} dx_\alpha / d\sigma\, dx_\beta / d\sigma = 0$$

que um ponto material só pode permanecer em repouso num campo gravítico se (g_{44}) for independente do local.

---

dos Reis e tradução do original alemão por Mário J. Saraiva, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1972, págs. 231-234.

C. MOELLER — *The Theory of Relativity*, second edition, At the Clarendon Press, Oxford, 1972, págs. 40-51.

Falta agora determinar aquelas componentes do potencial gravítico que definem o comportamento puramente geométrico-espacial do nosso contínuo ($g_{11}, g_{12}, \ldots, g_{33}$).

Da nossa premissa sobre a uniformidade de distribuição das massas que geram o campo, resulta que a curvatura do espaço métrico procurado deve ser constante. Para tal distribuição de massas deve, pois, o pretendido contínuo dos (x_1, x_2, x_3) para x_4 constante, ser um *espaço esférico*. Poderemos chegar a um tal espaço empregando, por exemplo, o seguinte processo: — partimos de um espaço euclideano quadridimensional: $\zeta_1\ \zeta_2\ \zeta_3\ \zeta_4$, com o elemento de linha ds., sendo portanto:

$$ds^2 = d\zeta_1^2 + d\zeta_2^2 + d\zeta_3^2 + d\zeta_4^2.$$

Neste espaço consideramos a hipersuperfície:

$$R^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 + \zeta_4^2$$

onde R designa uma constante. Os pontos desta hipersuperfície formam um contínuo tridimensional, um espaço esférico de raio de curvatura R. (...) Eliminando x_4 de ds^2 obtêm-se para o elemento de linha do espaço esféríco a expressão: $ds^2 = g_{ik}\, dx_i\, dx_k.$

$\Upsilon\mu\nu = \delta\mu\nu + \zeta\mu\ \ \zeta\nu\ /\ R^2 - \sigma^2$, onde $\delta\mu\nu = 1$ se $\mu = \nu$; $\delta\mu\nu = 0$ se $\mu \neq \nu$ e $\sigma^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2$. Agora, também, o elemento de linha do universo espacio-temporal de quatro dimensões, que estamos procurando que nos fica dado, para os potenciais g_{ik}, cujos índices diferem ambos de 4, teremos de pôr, como é evidente:

$$g_{ik} = -\left[\delta_{ik}\, x_i\, x_k\ /\ R^2 - \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right)\right]$$

As equações que propomos como equação de campo de gravitação são as seguintes, para um sistema de coordenadas de escolha arbitrária:

$$G\mu\nu = -x\nu\ (T\mu\nu - 1/2\ g\mu\nu\ T)$$

$$G\mu\nu = -dx_\alpha \begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\mu\alpha \\ \beta\end{Bmatrix} \begin{Bmatrix}\nu\beta \\ \alpha\end{Bmatrix} + \delta^2 \log \sqrt{-g}\ /\ dx\mu\ dx\nu -$$

$$\begin{Bmatrix}\mu\nu \\ \alpha\end{Bmatrix} \partial \log.\ \sqrt{-g}\ /\ dx_\alpha.$$

Este sistema de equações admite uma natural extensão que o concilia com o postulado da Relatividade e que é inteiramente análogo ao que, com a equação: $\triangle \varphi - \varphi = 4\pi k \rho$, se chega à equação de Poisson.

Com efeito, poderemos adicionar ao primeiro membro de equação de campo, o tensor fundamental $g\mu\nu$, multiplicado por uma constante universal λ provisoriamente desconhecida, sem que isto vá prejudicar a covariância geral; e, então, em vez da referida equação, teremos a seguinte:

$$G_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = -k\, [T_{\mu\nu} - 1/2\, g_{\mu\nu}\, T],$$ dando ao $g_{\mu\nu}$ os valores:

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{matrix}$$

Atendendo a: $g_{44} = 1, g_{14} = g_{24} = g_{34} = 0$, verifica-se facilmente que todas as equaçõees: $G_{\mu\nu} - \lambda\, g_{\mu\nu} = -k\, (T_{\mu\nu} - 1/2\, g_{\mu\nu}\, T)$ são satisfeitas se se verificarem as duas relações:

$$-2\ /\ R^2 + \lambda = -k\, \rho / 2;\ -\lambda = -x\, \rho\ /\ 2 \text{ ou}$$
$$\lambda = x\, \rho\ /\ 2 = 1\ /\ R^2$$

A constante universal λ agora introduzida determina, como se vê, tanto a densidade média de distribuição ρ, que pode substituir em equilíbrio, como também o raio R do espaço esférico e o seu volume: $2\pi^2\ R^3$ ($dV = a^3\ \text{sen}^2 \chi\ \text{sen}^2 d\chi\ d\varphi\ d\sigma\ d\theta$), cuja integração entre $0 - \pi$, $0 - \pi$, $0 - 2\pi$, dá precisamente: $2\pi^2 R^3$.

Segundo esta concepção, a massa total do universo M é finita, sendo o seu valor:

$$M = \rho\ 2\pi^2\ R^3 = 4\pi^2\ R^2 / \alpha = \sqrt{32}\ 2\ /\ \sqrt{x^3}\, \rho \text{ ou}:$$
$$M = \pi^2 \sqrt{32}\ /\ k^3\, \rho$$

Estas considerações levam-nos a conceber teoricamente o Universo real como um espaço curvo, de curvatura variável no espaço-tempo, de acordo com a densidade de distribuição da matéria, susceptível, porém, quando considerado em larga escala, de ser tomado como um espaço esférico[4].

Einstein, numa palavra, em 1917, definiu a estrutura geométrica e determinou as propriedades e constituição do mesmo. As dimensões espaciais correspondem, para Einstein, a uma esfera. Mas, trata-se duma esfera fechada e curvada pela 3.ª dimensão; a 4.ª dimensão é, porém, constante e rectilínea, não variando. Ou, por outras palavras, é uma hiperesfera de Riemann (esfera curvada segundo as três dimensões). Foi muito comparada esta estrutura a um hipercilindro, porque nos textos científicos de A. Einstein, nunca se encontrou qualquer referência ao termo de hipercilindro.

Mesmo sem a introdução do termo cosmológico (condição necessária para tornar possível uma distribuição quase estática da matéria, de acordo com as pequenas velocidades das estrelas), na equação do campo gravítico, chegar-se-ia à conclusão dum espaço com curvatura positiva. O modelo estável de Einstein veio a demonstrar-se como modelo cosmológico instável, devido particularmente aos estudos de E. Hubble, que levaram a enunciar a lei do deslocamento das riscas espectrais das Galáxias, segundo a qual, o deslocamento destas riscas é proporcional à distância. É a chamada Lei de Hubble-Humason. Matematicamente, virá: $H = dR / dt / R$ ou $V_g = d\vec{r}/dt = dR/dt\, r_o = H\vec{r}$ ou $V_g = H\vec{r}$ ou ainda; $\omega - \omega_o / \omega_o = - h / c\, l.$[5]

Todavia, Hubble dá-nos a equação seguinte para a determinação do valor real da expansão galáctica:

$$k = k + l\, r + m\, r^2$$

---

[4] H. A. LORENTZ; A. EINSTEIN; H. MINKOWSKI — *O Princípio da Relatividade*, Volume 1.º de Textos Fundamentais de Física Moderna, colectânea de artigos com um ensaio de H. Weyl, notas de O. Sommerfeld e prefácio de A. Blumenthal, prefácio da edição portuguesa por Manuel dos Reis e tradução da 6.ª edição original alemã por Mário José Saraiva, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1972, págs. 234-239.

A. S. EDDINGTON — *The Mathematical Theory of Relativity*, At the University Press, Cambridge, 1957, pág. 155.

[5] E. HUBBLE — *The Realm of the Nebulae*, Dover Publications, Inc., New York, 1958, pág. 112.

J. D. NORTH — *The Measure of the Universe*, a history of modern cosmology, At the Clarendon Press, Oxford, 1965, pág. 144.

L. D. LANDAU; E. LIFCHITZ — *Théorie des Champs*, traduit du russe par E. Gloukhian, Éditions Mir, Moscou, 1970, págs. 455-462.

Contudo, em 1922, A. Friedmann fundara o seu modelo cosmológico sobre a hipótese de que a distribuição da matéria no espaço é *homogénea e isótropa*. Este esquema cosmológico caracteriza-se por ser um espaço de métrica dependente do tempo, de curvatura constante a cada instante: positiva, nula ou negativa, a qual existe também sem Λ, na lei do campo gravítico.

O Universo de A. Friedmann é cheio de matéria e em expansão. Variando o raio do Universo com o tempo: $R = f(t)$, então a velocidade de expansão tende para infinito ($V_e = \infty$); segue-se naturalmente que o Universo é *hiperbólico*. No caso da expansão ser um infinitamente pequeno, o Universo define-se como um oscilador linear constante ou *universo pulsátil*.

Estes dois factores, a saber: Lei de Hubble-Humason e Cosmologia de A. Friedmann, levaram Einstein, a partir de 1931, a uma nova tomada de posição, mas já diferente relativamente à anterior, em Cosmologia. Isto significou que Einstein de Finitista torna-se Infinitista! ... ...

Esta nova fase é denominada de Einstein-II ou o Einstein de 1931. Vamos apresentar um texto significativo desta fase de Einstein, pela qual se inicia a nova teoria do *Universo Instável*: «We must now further satisfy the field equations of gravitation, that is to say the field equation without the cosmological member which had been introduced previously — ad hoc — : $(R_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, R) + k\, T_{ik} = 0$.

By substitution of the expression for the metric, which was based on the assumption of spatial isotropy, we get after calculation:

$$R_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, R = (zG^2 + G'^2 / G^2 + 2\, G'/ G) \,.\, G \,.$$
$$.\, A\, \delta_{ik}\ (i, k = 1, 2, 3, ...)$$

$$R_{44} - 1/2\, g_{44}\, R = -3\, (ZG^2 + G'^2 / G^2 + 2\, G' / G)$$
$$R_{i4} - 1 / 2\, g_{i4}\, R = 0\ (i = 1, 2, 3, ...)$$

Further we have for T_{ik}, the energy tensor of matter for — dust—: $T_{ik} = \rho\, dx^i/ds^i\, dx^k/ds$. The geodesics, along which the matter moves, are the lines along which x_4 alone varies; on them $dx_4 = ds$. We have: $T^{44} = \rho$, the only component different from zero. By lowering of the indice we get as the only non-vanishing component $T^{ik}: T_{44} = 1$.

Considering this, the field equations are:

$$z / G^2 + G^2 / G^2 + 2G' / G = 0$$
$$z / G^2 + G'^2 / G^2 - 1 / 3\, k\, \rho = 0$$

z/G^2 is the curvature in the spatial section x_4 =const. Since G is in all cases a relative measure for the metric distance of two material particules as function of time, G'/G expresses Hubble's expansion (...) If we set G'/G = h, the field equations in this case are:

$$2\,h' + 3\,h^2 = 0;\ 3\,h^2 = k\,\rho.$$

The relation between Hubble's expansion h and the average density, which is given in the second equation, is comparable to some extent with experience, at least as far as the order of magnitude is concerned. The expansion is given as 432 km/sec for the distance of 10^6 parsec (...) Because, due to the second equation; the space curvature is given in the general case as:

$$z\,G^{-2} = 1/3\,k\rho - h^2$$

……… ……

Hence, if the right side of the equation is positive, the space is of positive constant curvature and there for finite (...) If the right side is negative, the space is infinite. At present ρ is not sufficiently determined to enable us to deduce from this relation a non-vanishing mean curvature of space (the section x_4 =const,). In a case we neglect spatial curvature, the equation: $z\ G^{-2} = 1/3\ k\rho - h^2$ becomes, after suitable choice of the initial point of x_4: $h = 2/3\,1/x_4$. This equation has a singularity for $x_4 = O$, or it is has a positive expansion and begins to exist for $x_4 = 0$(...) From the measured value of h we get the time of existence of the world up to now $1{,}5 \times 10^9$ years. (...) a — *Space with positive curvature*: — G remains in the interval: $0 \leq G \leq G$.

b — *Space with negative curvature*: —

$$(dG\,/\,dt)^2 = G_o + G'/\,G\,.$$

G increases with t, from $G = 0$ to $G = +\infty$ (or goes from $G = \infty$ to $= 0$).

The radius G rises from 0 to G°, and then again drops continuously to 0. The spatial section is finite (spherical): $1/3\ k\ p - h^2 > 0$.

Hence $dG\,/\,dt$ decreases monotonically from $+\infty$ to 1.

This is then a case of continued expansion with no contraction. The spatial section is infinite and we have: $1/3\ k\ \rho - h^2 < 0$.

The case of plane spatial section, which was treated in the previous section, lies between these two cases, according to the equation: $(dG/dt)^2 = G_o\,/G$. The case of negative curvature contains as a limiting case that of vanishing ρ» [6].

Por conseguinte, Einstein, a partir de 1931, inclinou-se para um modelo cosmológico com espaço de curvatura positiva (por ser um universo finito). Desta feita, o Universo expande-se a partir dum estado de altíssima concentração para depois se contrair e, então, voltar ao seu estado inicial. Este é o Einstein-II, que ainda se apresenta *finitista.* Porém, mais tarde, com De Sitter, opta pelo modelo de espaço com *curvatura nula,* segundo o qual, o Universo, a partir do mesmo estado singular se expande ilimitadamente.

A dada altura, Einstein professou a existência de um espaço de curvatura negativa. Tal facto, veio permitir ao nosso pensador tornar-se infinitista. Entretanto, o último e definitivo estádio é um regresso ao finitismo (Einstein-III).

Um dos pontos fundamentais abordados por Einstein fora o da constituição do seu Universo, o qual é formado por um fluido desagregado e perfeito.

II. Fundamentação Filosófica da Cosmologia de Einstein:

Segundo o primeiro esquema cosmológico Einstein perfila um Universo espacialmente fechado com matéria uniformemente distribuída.

O escalar ρ de densidade de distribuição média pode «a-priori» ser uma função das coordenadas espaciais curvadas. Admitindo, contudo, que o universo se fecha sobre si mesmo, seguir-se-á que — ρ — é independente do local e que todas as grandezas são independentes da coordenada temporal: i c t.

---

6 A. EINSTEIN — *The Meaning of Relativity*, second edition, Princeton University Press, New Jersey, 1945, págs. 117-123.

A. EINSTEIN — *Sur le Problème Cosmologique, théorie de la Gravitation Généralisée*, traduit par M. Solovine, Gauthier-Villars, Paris, 1951, págs. 11-15.

C. MOELLER — *The Theory of Relativity*, second edition, At the Clarendon Press, Oxford, 1972, págs. 509-520.

COSMOLOGICAL MODELS — editado pelo Instituto Gulbenkian de Ciência, Lisboa, 1964, pág. 65.

Partilhando, segundo Einstein, a uniformidade de distribuição das massas, resulta que a curvatura do espaço métrico deve ser constante. O pretendido contínuo, no que toca à coordenada temporal, é constante. O universo de Einstein é uma hiperesfera a 4-dimensões, que se curva pela 3.ª dimensão, sendo a 4.ª dimensão linear e infinita. A estrutura hiperesférica do universo de Einstein é, por muitos, comparada a um hipercilindro (nunca Einstein, em nenhuma obra sua, definiu a estrutura geométrica do universo, como um hipercilindro), no qual o eixo da geratriz é identificado com a coordenada temporal: x_4. Esta estrutura geométrica é um absurdo para a razão humana, porque, segundo este, as três dimensões espaciais são curvadas e a temporal é rectilínea e aberta na linha do infinito. Este esquema está em contradição com o Invariante Absoluto, o qual revela a conexão espácio-temporal: ds^2.

O Universo de Einstein é estático e está plenamente actualizado; porém, tal universo parece não incluir a potência. A densidade está plenamente distribuída e é homogénea em todos os pontos do universo. Contudo, a lei de Hubble-Humason desfez esta actualização da densidade de matéria, impondo à Cosmologia, por via experimental, a Expansão do Universo. Por sua vez, o conceito de expansão implica o de potência.

A duração do universo de Einstein é finita, na linha do passado. O Universo é finito na duração, porque pela evolução contínua, segue uma linha progressiva e irreversível; a linearidade irreversível não poderá ser cíclica.

Einstein, por volta dos anos trinta, inclinou-se para o modelo cosmológico, com espaço de curvatura positiva. Neste modelo, Einstein incluiu o termo adicional nas equações de campo, levando-o a introduzir o conceito de expansão.

Os últimos anos da posição científica que caracterizou o Einstein-II fora dominada pela existência dum Universo, com curvatura negativa (infinita). Abandonando esta hipótese cosmológica, passado algum tempo, termina com um universo de curvatura nula (última fase e definitiva). Nesta, Einstein termina no finitismo.

Para o Einstein-II, a duração, na linha do passado, é infinita. Se, entretanto, o universo fosse infinito para o tempo passado, pela expansão contínua da conexão: massa-energia, actualmente já não existiria massa. A massa do universo estaria rarefeita. Também, verificando-se uma tal duração do universo infinitamente, a radiação luminosa das estrelas estaria totalmente em acto. Ao integrar: $L/R^2 = 4\pi\, dR$, desde 0 até ∞, ver-se-ia que (0) teria que receber de todo o universo, na unidade de tempo, uma quantidade infinita de radiação. Desta feita, I_r seria igual ao infinito.

Assim, matematicamente teríamos:

$$\lim_{n \to \infty} L / R^2_n = 0 \quad \text{ou} \quad \int_0^\infty L / R^2 . \, d R = I + K$$

Segundo este paradoxo, denominado de Olbers (1826), o Universo, hoje em dia, teria um brilho infinito.

Uma outra razão e fundamental, para mais se consolidar a opinião de que o Universo é finito no tempo, na linha do passado, é a própria estrutura geodésica do Universo.

Sendo, pois, o Universo, um espaço fechado a 3-dimensões, a coordenada temporal: i c t, deverá acompanhar esta curvatura, porque é um elemento geométrico desse universo.

Porém, Einstein não se manteve muitos anos nesta posição infinitista. Acabou, por fim, com De Sitter, por voltar a ser finitista. Aqui temos o Einstein-III, que professa um modelo com espaço de curvatura nula, segundo o qual o universo se expande ilimitadamente, a partir dum estado singular. Entretanto, ficou de pé o problema do «como» desta expansão pura, à qual Einstein não deu qualquer resposta.

Será esta expansão, uma vez que ilimitada, uma pura potência? Numa palavra, terá tal modelo geométrico condições de inteligibilidade? ... ...Muitos outros modelos cosmológicos relativísticos não implicarão uma nova resposta epistemológica?

Conclusão.

Resumidamente, poderemos concluir as posições cosmológicas de Einstein em forma de sumário: — A matéria e energia repartem-se uniformemente num espaço fechado, hiperesférico, homogéneo, sem nenhuma singularidade, onde nenhum ponto se distingue intrinsecamente de outro ponto, senão se realiza pelas irregularidades locais, fortuitas e desprovidas de significação cósmica.

Para uma hipersuperfície a três dimensões, a geometria de Riemann permite definir uma curvatura por generalização da curvatura de Gauss das superfícies correntes. No caso de se tratar de uma hiperesfera, o encurvamento não depende nem de uma nem de outra geometria, mas sim, trata-se de uma constante característica da variedade, e como é positiva, define um raio de curvatura, análogo ao raio da esfera. Existem, com efeito, relações definidas por aplicação das equações do campo, entre esse raio, a densidade cósmica e a constante [7].

Num espaço desta natureza, onde não existem rectas, a luz corre linhas de caminho curto, geodésicas, análogas aos círculos da esfera, sendo, pois, estas linhas de universo, curvas fechadas.

O volume do Universo assim como a sua circunferência são finitas. Essas dimensões estão determinadas pelo valor da densidade cósmica e as propriedades geométricas do espaço, não de forma unívoca.

No Universo de Einstein, o encurtamento do espaço não afecta o tempo. A distinção intrínseca entre tempo e espaço, posta em dúvida pela geometria local da teoria da relatividade restrita, volta a restabelecer-se à escala cósmica. Um tempo universal flui uniformemente em qualquer ponto do universo einsteiniano, vá de menos infinito a mais infinito, sem que em nenhum momento se distinga intrinsecamente de qualquer outro [8].

É interessante notar como Einstein estava convencido do princípio de Mach, segundo o qual a inércia não é senão a expressão de uma mútua acção entre todas as massas do Cosmos, ou por outras palavras, o campo de inércia definido pelos potenciais gravíticos: g_{ik}. É claro que a sua primeira equação tensorial de campo podia ser considerada como um sistema de equações diferenciais que davam os g_{ik} em função das propriedades da matéria, representadas pelo tensor T_{ik}, isto é: a matéria. Como $G_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, G = -k\, T_{ik}$ constitui a equação diferencial do campo, os ditos potenciais não ficariam determinados se não se fixassem condições de contorno no infinito.

Einstein pensava que era impossível fixar estas condições de modo que os potenciais gravitatórios ficassem determinados pelo tensor energia-momento e, por este, procurando solucionar esta dificuldade no infinito, introduziu o termo cosmológico, dado que para valores positivos de Λ, as equações $G_{ik} - 1/2\, g_{ik}\, G + \Lambda\, g_{ik} = -k\, T_{ik}$,

7 J. MERLEAU-PONTY — *Cosmologia del Siglo XX*, estudio epistemológico e histórico de las teorías de la cosmología contemporánea, versión española de J. L. Gureña, Editorial Gredos, S. A., Madrid, 1971, pág. 50.

8 J. M P. — o. c., pág. 51.

admitiam uma solução em que a densidade da matéria era uniforme, suas velocidades ao acaso nulas, curvando-se no espaço.

Não obstante o rigor do seu esquematismo geométrico, Einstein equivocou-se, mais tarde, ao pensar que para valores positivos de Λ não exitem soluções da anterior equação no espaço vazio ou seja para: $T_{ik} = O$. Precisamente, mediante estes dois acertos julgava ter incorporado o princípio de Mach na sua teoria. Com efeito, o que sucedera, seria uma consequência directa do princípio da relatividade da inércia, o qual define não poder existir inércia alguma na total ausência da matéria.

À concepção einsteiniana se objectou, com o tempo, que com ela se restabeleciam para o Universo, as noções de espaço e tempo absolutos. Porém, a esta objecção respondera A. S. Eddington que a relatividade não nega a realidade de um tempo absoluto, dado que este se não pode deduzir de um dado experimental conhecido e que não nos devemos desconsertar por ver reaparecer tal noção na teoria dos fenómenos à escala cósmica, sobre a qual nada há na maioria de dados experimentais.

Eddington continua a sua observação referindo que assim como cada observador limitado tem a sua própria distinção particular de espaço e tempo; um ser coextensivo ao Universo inteiro poderia ter também uma distinção especial de espaço e tempo que lhe fosse conatural; para este tempo não haveria dificuldade, em chamá-lo de absoluto.

Contudo, outro inconveniente se objectou ao Universo de Einstein e desta vez foi o próprio Eddington que o propôs, o qual resulta da relação anteriormente considerada entre o raio e a densidade, sendo o equilíbrio do Universo instável à menor perturbação, determinando uma contracção ou dilatação indefinidamente. Daqui se estabelece a seguinte ilação: não é possível considerar tal modelo como representativo do Universo físico e homogéneo, tomando a média estatística das observações sobre a distribuição da matéria.

Apesar das múltiplas e variadas objecções, bem como dos mais recentes modelos cosmológicos, aperfeiçoados pelas medições astrofísicas, cabe-nos render uma homenagem pelo que constitui de progressivo e inovador no domínio da Cosmologia Científica, as «Kosmologische Betrachtungen».

RAMIRO DÉLIO BORGES DE MENESES
Professor do I. C. H. T.