

線分都市経済における 単一中心型集積の分岐解析

相澤 大輝¹・池田 清宏²・木暮 洋介³・大澤 実⁴・José Maria GASPAR⁵

¹非会員 東北大学 大学院情報科学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉)

E-mail: hiroki.aizawa.p3@dc.tohoku.ac.jp

²正会員 東北大学教授 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉)

E-mail: kiyohiro.ikeda.b4@tohoku.ac.jp

³学生会員 東北大学 大学院工学研究科 (〒 980-8579 仙台市青葉区荒巻青葉)

E-mail: yosuke.kogure.t2@dc.tohoku.ac.jp

⁴正会員 京都大学助教 経済研究所 (〒 606-8501 京都府京都市左京区吉田本町)

E-mail: osawa.minoru.4z@kyoto-u.ac.jp

⁵Lecturer, Católica Porto Business School (Rua Diogo Botelho, 1327 4169-005 Porto)

E-mail: josemlopesgaspar@gmail.com

都市への人口集積現象のメカニズムは新経済地理学モデルの理論分析を通じて研究されており、分岐を通じて集積パターンが形成されることが解明されている。しかし、多くの研究は2立地点空間や競技場経済のような対称性の高い空間を仮定しており、現実空間がもつ地理的優位性を捨象している。本研究では、境界がある線分上に等間隔に都市が分布する線分都市経済に着目し、単一の巨大都市型の集積が、衛星都市を含む都市群の集積に変化するメカニズムを、分岐解析により明らかにする。また、解析例として Forslid & Ottaviano¹⁾ のモデルをとりあげる。その結果、工業財への支出割合が大きいほど、あるいは、財の代替弾力性が小さくなるほど、衛星都市が中心都市から離れた箇所で発現することが明らかになった。

Key Words: *bifurcation analysis, group-theoretic bifurcation theory, population distribution, replicator dynamics*

1. はじめに

(1) 背景と目的

経済集積がどこに、どの程度生じるかを知ることは、社会基盤整備等の都市・地域政策の影響を予測・評価する際に不可欠である。そのため、都市・地域間における経済活動や人口の集積・分散のメカニズムを説明する、新経済地理学 (NEG) の枠組みが土木計画分野でも導入され、研究されている。例えば、久武・山崎²⁾、佐藤他³⁾、石倉⁴⁾、高山他^{5),6),7)} は NEG の理論に基づく空間的应用一般均衡 (SCGE) モデルを開発した。また、欧州でも、交通政策の広域的・長期的な効果を評価するため、NEG の理論に基づく SCGE モデルが開発され、道路整備や鉄道整備の効果の定量分析がなされている⁸⁾。したがって、土木計画分野でも、NEG モデルの特性分析は基礎的研究課題である。

NEG は、Krugman⁹⁾ が提唱した理論を核として成立した研究分野である。Krugman は、Dixit & Stiglitz の独占的競争モデル¹⁰⁾ を空間経済の一般均衡モデルに拡張し、労働者の地域間移動を考慮することによって、地域間輸送費の変化による人口の集積現象を分析する核周辺モデルを開発した。このモデルは人口集積に関

して示唆に富む結果をもたらした。例えば、2つの都市間の輸送費が低下すると、対称な人口分布が不安定な均衡となり、いずれかの地域に経済活動や人口が集中する分岐現象が生ずることが明らかにされている。これは、都市間交通システムの整備に伴うストロー効果を定性的に説明している。

Krugman 以降、2都市の枠組みに基づいた NEG モデルが数多く提案されている。しかし、Fujita & Mori¹¹⁾ が指摘するように、2都市空間では現実で観測されるような多数の都市への人口集積の形成メカニズムを説明できない。そのため、多都市の NEG モデルの分析が進められており、その枠組みの例として競技場経済が挙げられる^{12)~17)}

競技場経済をはじめ、高い対称性を保有する地理空間は、数学的な取り扱いが容易であり、モデルの基本特性を把握する研究には適している。その反面、こうした空間は現実の空間が備える地理的優位性を捨象している。現実空間における集積挙動を解明するためには、地理的優位性が存在するもとの集積特性を調べる必要がある。例えば、Matsuyama¹⁸⁾ は新貿易モデルについて、地理的優位性の影響を調べている。また、大澤¹⁹⁾ は、NEG モデルの数理解析の課題の一つとして、

競技場経済よりも対称性が低い地理空間上の集積形成メカニズムの分析の必要性を挙げている。

そこで、本研究では地理的に優位な立地点の存在する最も基本的な空間設定である線分都市経済に着目する。この経済において、NEGにおいて標準的な調整過程であるレプリケータダイナミクス²⁰⁾のもとでの、集積変遷メカニズムの一端を明らかにする。具体的には、単一中心型の集積形態（巨大都市）から、輸送費用の変化に伴って現れる集積形態とそのメカニズムを一般的に明らかにする。さらに、この集積形態の安定性に着目することで、交通システムの発展が単一中心型の集積形態への変遷をもたらすことを示すことを目的とする。この目的を達成するために、本研究では、分岐理論を援用した解析を実行する。結果としては、大都市に対して対称的に衛星都市が形成されるパターンが安定均衡解として生じうること一般的に示す。

また、具体的な NEG モデルの解析例として Forslid & Ottaviano¹⁾ のモデル（以降、FO モデル）を取り上げる。FO モデルのもとで、衛星都市の発現が、輸送費用・経済学的パラメータにどのように依存するかを明らかにするとともに、一般論との整合性を確認する。

本論文の構成を述べる。2 章では、モデルを定式化する。3 章では、単一中心型の集積の分岐解析法を述べる。4 章では、単一中心型の集積からどのような衛星都市が発現しうるかを解析的に明らかにする。5 章では、FO モデルを考え、輸送費用・経済学的パラメータが衛星都市の発現にどのように影響するかを、解析的に明らかにする。6 章では、FO モデルの数値解析により、4, 5 章の理論を検証する。7 章は結びである。

(2) 関連研究

線分都市経済に関する研究は、NEG 勃興期にもなされている。Mori²¹⁾ は、輸送費用が低い場合、巨大都市が工業ベルト（i.e., 連続した都市群）で接続される、メガロポリス型集積の存在を明らかにしている。また、Fujita & Mori²²⁾ は、単一中心状態から徐々に人口が大きくなると、Christaller²³⁾ や Lösch²⁴⁾ により提案された中心地システムが発現することを明らかにした。Fujita et al.²⁵⁾ は、CP モデルと多産業の空間経済とを組み合わせることにより、連続的な線分都市経済の集積を調べた。そして、mono-center の周辺に都市が形成され、hierarchical system が自己組織化するという線分都市経済の特性の一端を数値計算例に基づき明らかにしている。

しかし、それ以降 NEG モデルのミクロ経済学的側面の研究が進められる一方で、線分都市空間上のモデル解析はあまり発展していない。その一因は、この空間設定では理論計算・数値計算ともにモデルの解析が困

難になることである。Ikeda et al.²⁶⁾ は線分都市経済上の集積挙動を数値解析により調べ、競技場経済の集積挙動との類似性を明らかにしているが、やはり断片的な解析にとどまっている。

以上の関連研究に対して、本研究の特徴は、分岐解析を通じて集積の変遷メカニズムを一般的に明らかにする点にある。また、NEG モデルの分岐解析にあたって、従来、いわゆるブレイクポイント²⁷⁾ からの分岐に焦点が当てられてきた^{15)~17)}。一般に、ブレイクポイントからの分岐は、輸送費用の変化に伴い、人口が存在する都市間の人口移動が発生する分岐である。これに対して本研究では、輸送費用の変化に伴い、人口が存在する都市と、存在しない都市との間の人口移動が発生する分岐に焦点を当てている。この分岐は、いわゆるサステインポイント²⁷⁾ からの分岐にも対応しており、本研究のもう一つの特徴でもある。

また、本研究では、中心の巨大都市と衛星都市からなる集積の変遷について議論している。既存研究では、例えば、Fujita et al.²⁵⁾ は衛星都市の創発について議論している。ここで、現実の経済を俯瞰したとき、例えば我が国では、東京に最も人口が集積しており、その他、大阪・名古屋・仙台・札幌などの都市が存在している。この点を鑑みると、従来研究と比較したときの本研究の経済学的貢献は、そのような複数地点に集積が偏在するような均衡からの変遷を理論的に議論するための道筋を拓いた点にもある。

最後に、本研究で FO モデルを採用する理由について触れる。本研究で焦点をあてる均衡が生じうるモデルの候補は、一定程度明らかとなっている。例えば、大澤¹⁹⁾、Akamatsu et al.¹⁴⁾ は交易自由度の改善に伴う都市数の減少・人口の集積をもたらすモデル群を調べている。このモデル群はクラス I モデルと分類されており、本研究では、その中で解析的取り扱いが容易な FO モデルを採用する。ここで、大澤¹⁹⁾、Akamatsu et al.¹⁴⁾ の解析的な分析は、競技場経済でなされたものであり、また、巨大都市から衛星都市がどこに発現するかについて、均衡及びその安定性の議論はされていない。そのため、これを議論する本研究は FO モデルの性質の解明に貢献するものでもある。

2. 基本的な枠組み

本章では、多都市 NEG モデルを解析するための本研究の枠組みを示す。

(1) 一般的なモデル

都市（潜在的な立地点）が N だけ存在する空間を仮定する。また、都市の集合を $\mathcal{N} \equiv \{0, 1, \dots, N-1\}$ と

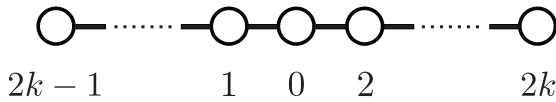


図-1 線分都市経済

する。本論文では、経済には企業あるいは労働者など単一種類の移動主体が存在し、それぞれの主体が唯一の都市を選択すると仮定する。都市 $i \in \mathcal{N}$ に居住する主体の数を連続値 $\lambda_i \geq 0$ によって表現する。以降、各都市の主体の分布を $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{N}}$ とする。外部への、または外部からの移住のない閉鎖経済を仮定する。一般性を失うことなく主体数を 1 に正規化すると、主体数の保存は $\sum_{i \in \mathcal{N}} \lambda_i = 1$ と表現される。都市 i における主体の効用関数を $v_i(\lambda)$ とする。 $v(\lambda) = (v_i(\lambda))_{i \in \mathcal{N}}$ は少なくとも一回微分可能とする。

都市 i, j 間の空間的な相互作用は $d_{ij}(\phi) \in (0, 1)$ に依存すると仮定する。なお、 $\phi \in (0, 1)$ は経済全体の輸送技術の水準を表現する、モデルの構造パラメタである。この ϕ は、小さいほど輸送技術が低い状況を、大きいほど輸送技術が高い状況を表現するものとする。このように定義したとき、 ϕ は従来の新経済地理学において定義されている輸送自由度と同様の概念である（付録 I (3) 節参照）。そのため、本研究では ϕ を輸送自由度と呼ぶこととする。また、空間的な相互作用 d_{ij} をまとめた $N \times N$ 行列を空間割引行列と呼ぶこととする。すると、効用関数 v は $D(\phi)$ をパラメータとして含むことになる。以降、 $v(\lambda)$ を $v(\lambda, \phi)$ と表現することとする。

主体は自身の効用を改善するために居住する都市を自由に選択できるものとする。このとき、以下の相補性条件：

$$\begin{cases} v^* - v_i(\lambda, \phi) = 0 & \text{if } \lambda_i > 0 \\ v^* - v_i(\lambda, \phi) \geq 0 & \text{if } \lambda_i = 0 \end{cases} \quad (1)$$

を満足する λ を空間均衡とする。ここで、 v^* は均衡状態における効用水準である。

(2) 線分都市経済

$N = 2k + 1$ ($k \geq 1$) とし、図-1 のような線分都市経済を考える。図中小さな白丸は都市を表現し、その間の実線は交通リンクを表現する。全ての都市は線分上に等間隔に配置されており、番号が振られている。都市の番号について、まず、中心の都市を 0 とする。都市 0 の左側は、都市 0 からみて順に $1, 3, \dots, 2k - 1$ とし、右側は $2, 4, \dots, 2k$ とする。空間割引行列の要素は、都市 i, j 間のリンク数を $m(i, j)$ として、 $d_{ij}(\phi) = \phi^{m(i, j)}$ と定義する。例えば、都市 i と都市 j が隣接するなら

ば、 $d_{ij}(\phi) = \phi$ である。

線分都市経済の対称性は、都市の人口分布の入れ替え、すなわち人口分布への群の作用にもとづく間接効用関数の対称性で表現できる。まず、この入れ替えは 1 次の二面体群で表現できる：

$$D_1 = \langle e, s \rangle \quad (2)$$

ここで、 e は恒等変換、 s は鏡映変換である。恒等変換は、都市の人口分布を入れ替えない操作である。一方で、鏡映変換とは、一般にはある軸を境に図形を反転させる変換である²⁹⁾。本研究における鏡映変換は、都市 0 を境にして、左右の都市 (e.g. 都市 1 と都市 2) の人口を入れ替える変換である。なお、鏡映変換を 2 回施せば元の人口分布に戻るため、 $e = s^2$ である。

D_1 の元 e, s の作用を、次のような $N \times N$ の行列として表現することができる：

$$T(e) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad T(s) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ \hline & S & \\ & & \ddots & \\ & & & S \end{pmatrix}.$$

ここで、

$$S = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

本論文では、立地点間の異質性は存在しないとする。すなわち、間接効用は D_1 の変換に対して次の条件（同変性）を満足すると仮定する：

$$T(g)v(\lambda, \phi) = v(T(g)\lambda, \phi), \quad g \in D_1 \quad (3)$$

(3) レプリケータダイナミクス

空間均衡の分岐挙動を具体的に調べるためには、 λ の調整動学のクラスを特定する必要がある。本研究では、調整動学としてレプリケータダイナミクスを利用する：

$$\dot{\lambda} = \lambda_i(v_i(\lambda, \phi) - \bar{v}(\lambda, \phi)), \quad \forall i \in \mathcal{N}. \quad (4)$$

ここで、 $\bar{v}(\lambda, \phi) \equiv \lambda^\top v$ は平均効用である。

空間均衡を求める問題を、レプリケータダイナミクスの停留点 (λ^*, ϕ) を求める問題に関連づけることができる²⁸⁾。具体的には、次の静的な支配方程式を満足するような停留点は空間均衡の候補である：

$$F(\lambda^*, \phi) = 0. \quad (5)$$

本論文では、停留点の特性に着目する。

(4) 停留点の安定性と特異点

停留点 λ^* の安定性は、その点における支配方程式のヤコビ行列：

$$J(\lambda^*, \phi) = \frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda^*, \phi). \quad (6)$$

の固有値の符号によって判定することができる：

$\begin{cases} \text{線形安定：} & \text{全ての固有値の実部が負} \\ \text{線形不安定：} & \text{少なくとも一つの固有値の実部が正} \end{cases}$
 停留点が漸近的に（不）安定であることと、線形（不）安定であることは等価である。また、安定な空間均衡の集合は安定な停留点の集合と一致する²⁸⁾。

ヤコビ行列の固有値の少なくとも一つがゼロであるとき、その停留点は特異点である。特異点の一種として分岐点があり、分岐点からは、外生パラメータの変化に伴い、支配方程式 (5) の解が枝分かれする。

3. 停留点の分類と分岐理論

本章では、線分都市経済の中心都市に全ての人口が集中するような停留点は、端点解と呼ばれるクラスに属することを議論し、このような停留点からの分岐解析の手法について簡単に説明する。

(1) 停留点の分類

レプリケータダイナミクスの停留点は内点解と端点解に分類できる。内点解は全ての都市の人口が非ゼロであるような点、端点解は少なくとも一つの都市の人口がゼロであるような点である。

m 個の都市の人口が非ゼロであるような空間分布は、以下のように並べ替えることができる：

$$\hat{\lambda} = (\lambda_+, \lambda_0). \quad (7)$$

ここで、

$$\lambda_+ = \{\lambda_i > 0 \mid i = 0, 1, \dots, m-1\},$$

$$\lambda_0 = \mathbf{0}_{N-m}.$$

ただし、 $\mathbf{0}_k$ は k 次元のゼロベクトルを表す。端点解ならば、 $m < N$ であり、単一中心型の停留点は、 $m = 1$ の端点解である。内点解は $m = N$ であり、 λ_0 が存在しない。

人口分布 λ を $\hat{\lambda}$ へ並べ替えるのと同様に、ヤコビ行列 $J(\lambda, \phi)$ を次のように並べ替えることができる：

$$J(\hat{\lambda}, \phi) = \begin{pmatrix} J_+ & J_{+0} \\ \mathbf{O} & J_0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

ここで、

$$J_+ = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$$

$$\times \left(\frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid 0 \leq i, j \leq m-1 \right),$$

$$J_{+0} = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$$

$$\times \left(\frac{\partial(v_i - \bar{v})}{\partial \lambda_j} \mid i = 0, \dots, m-1; j = m, \dots, N-1 \right),$$

$$J_0 = \text{diag}(v_m - \bar{v}, \dots, v_{N-1} - \bar{v}).$$

$J(\hat{\lambda}, \phi)$ はブロック対角行列であるから、その固有値は対角ブロックである J_+ 及び J_0 の固有値として与えられる。 J_+, J_0 の固有値が全て負であるならば安定解である。特に、端点解の安定条件は以下の二つの条件に分解される：

$$\begin{cases} \lambda_+ \text{ に対応する安定条件：} \\ J_+ \text{ の全ての固有値の実部が負} \\ \lambda_0 \text{ に対応する持続可能性条件：} \\ J_0 \text{ の全ての固有値（対角項）が負} \end{cases}$$

端点解における分岐点は、 J_+ が特異になるような分岐点（ブレイクポイント）と、 $v_i - \bar{v} = 0$ ($m \leq i \leq N-1$) となるような分岐点に分類される。ブレイクポイントで分岐した解は、分岐前の解よりも対称性が低い解である。一方、本研究で取り上げるサステインポイント（4章参照）は、ある都市の人口がゼロとなる点であり、均衡が持続可能でなくなる点である。このような点では、 J_0 が特異となる。

(2) 分岐解析法

特異点から分岐解を求める手法を整理する。

支配方程式 (5) のヤコビ行列の固有値がゼロとなる点の特異点である。特異点を (λ_c, ϕ_c) と定義する。また、特異点 (λ_c, ϕ_c) における、ゼロ固有値の数を特異点の多重度と呼ぶ。多重度を M とすれば $1 \leq M \leq N-1$ である。

分岐点近傍では、分岐解が存在する空間の次元は分岐点の多重度 M と等しいことが知られている。この空間を張る M 個の変数を能動変数と呼ぶ。このとき、残りの次元の空間を張る変数を、適当な数学的手続きによって能動変数で表現できる。この数学的手続きは Liapunov-Schmidt 簡約と呼ばれる。Liapunov-Schmidt 簡約により、着目する変数の次元が低下するため、支配方程式 (5) をより低次元な方程式に簡約できる：

$$\tilde{F}(\delta\lambda, \psi) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

ここで、 $\delta\lambda \in \mathbb{R}^M$ と $\psi \in \mathbb{R}$ は分岐点からの増分量、式 (9) は分岐方程式と呼ばれる方程式である¹⁾。

分岐方程式 (9) の解は、支配方程式 (5) の分岐解と 1 対 1 に対応する。したがって、分岐方程式を導出できれば、低次元 (i.e. M 次元) の方程式の解を求めることが、支配方程式 (5) の分岐解を求めることと等価であり、解析的に分岐解を求め易くなる。

¹⁾ 一般の支配方程式に対する分岐方程式の誘導については Ikeda & Murota²⁹⁾ を参照されたい。

4. 単一中心分布からの分岐

線分都市経済の中心都市に集中した分布からどのような集積パターンが現れるのかを、この均衡が不安定となる点（サステインポイント）における分岐方程式を調べることによって明らかにする。

(1) 単一中心型分布上の分岐解析

都市 0 に全主体が集中した分布 $\lambda^{\text{FA}} \equiv (1, 0, \dots, 0)$ の分岐解の存在とその安定性を解析的に調べる。

同変性 (3) により、間接効用は次の関係を満足する：

$$v_i(\lambda^{\text{FA}}, \phi) = v_{i+1}(\lambda^{\text{FA}}, \phi), \quad i = 1, 3, \dots, 2k-1. \quad (10)$$

したがって、 $v_i - v_0 = v_{i+1} - v_0 = 0$ であり、これを用いると支配方程式のヤコビ行列 (8) は次式となる：

$$J(\lambda^{\text{FA}}, \phi) = \begin{pmatrix} -v_0 & -v_1 \mathbf{1}_2 & \cdots & -v_{2k-1} \mathbf{1}_2 \\ & (v_1 - v_0) I_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & (v_{2k-1} - v_0) I_2 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

ここで、 $\mathbf{1}_2 = (1, 1)$ は行ベクトル、 I_2 は 2×2 の単位行列である。

ある輸送自由度の水準 ϕ_c^i が存在して、 $v_i - v_0 = 0$ となると仮定する。また、 ϕ_c^i において、 $v_j - v_0 \neq 0$ ($j \neq i$) と仮定する。このとき、 $J(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^i)$ は丁度 2 つのゼロ固有値をもつから、 $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^i)$ は多重度 2 の特異点である。したがって、分岐方程式は 2 次元になる。

そこで、特異点 $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ の近傍における増分変数：

$$(\lambda, \phi) = (\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1) + (\delta\lambda, \psi), \\ \delta\lambda \in \mathbb{R}^2, \quad \psi \in \mathbb{R}$$

に対する分岐方程式を次の命題に示す。なお、他の特異点 $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^i)$ ($i = 3, \dots, 2k-1$) についても同様の式が成立する。

命題 1. $(\lambda, \phi) = (\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1) + (\delta\lambda, \psi)$ とする。このとき、分岐方程式は以下で与えられる：

$$\tilde{F}_1 = \lambda_1(a\psi + b\lambda_1 + c\lambda_2) + \text{高次項}, \quad (12)$$

$$\tilde{F}_2 = \lambda_2(a\psi + b\lambda_2 + c\lambda_1) + \text{高次項}. \quad (13)$$

ここで、

$$a = \frac{\partial g}{\partial \phi} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \phi) = (0, 0, \phi_c)},$$

$$b = \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \phi) = (0, 0, \phi_c)},$$

$$c = \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} \Big|_{(\lambda_1, \lambda_2, \phi) = (0, 0, \phi_c)},$$

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \phi) = v_1(1 - \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{0}_{N-3}, \phi)$$

$$-v_0(1 - \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{0}_{N-3}, \phi).$$

Proof. 付録 II (1) 節参照。□

命題 1 の分岐方程式は、同変性条件 (3) のみから導かれたものであり、 $v(\lambda)$ が微分可能であれば成立する。また、 $a < 0$ であれば λ^{FA} は安定である。

分岐方程式 (12), (13) の解は、分岐解と 1 対 1 に対応する。特異点 $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ から発現する分岐解は、以下の命題で特徴づけられる。

命題 2. $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ は分岐点であり、次の 2 種類の分岐解が発現する：

$$(\lambda, \phi) = (\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1) + (\delta\lambda_p, \psi_p), \quad p = 1, 2.$$

ここで、

$$\begin{cases} \delta\lambda_1 = w(-1, 1, 0, \mathbf{0}_{N-3}), & \psi_1 \approx -bw/a, \\ \delta\lambda_2 = w(-2, 1, 1, \mathbf{0}_{N-3}), & \psi_2 \approx -(b+c)w/a \end{cases}$$

$$0 < w \ll 1.$$

Proof. 付録 II (2) 節参照。□

$\delta\lambda_1$ は衛星都市が 1 個出現する分岐解であり、 $\delta\lambda_2$ は 2 個出現する分岐解である。

分岐解の安定性を議論する。まず、分岐解に対応するヤコビ行列の固有値の具体形を次の補題に示す。

補題 1. 分岐解 $(\delta\lambda_1, \psi_1)$ に対応する固有値は次である：

$$e_1 \approx bw, \quad e_2 \approx (c-b)w.$$

一方、分岐解 $(\delta\lambda_2, \psi_2)$ に対応する固有値は次である：

$$e_1 \approx (b+c)w, \quad e_2 \approx (b-c)w.$$

Proof. 付録 II (3) 節参照。□

固有値が全て負であれば分岐解は安定、正の固有値が少なくとも一つあれば不安定である。補題 1 の b, c はモデル v に応じて定まるパラメータであるから、 λ^{FA} からの分岐解の安定性は、着目する経済モデルやそのパラメータの値に依存する。

では、これらの分岐解はどの方向への分岐であれば安定となりうるだろうか？ まず、分岐前において λ^{FA} が安定であると仮定しよう。

仮定 1. ある $\phi_c \in (0, 1)$ が存在して、 $\phi > \phi_c$ では $a < 0$ 、すなわち、 λ^{FA} は安定であるとする。また、 $\phi < \phi_c$ では不安定であるとする。(付録 II (4) 節参照)。

本研究では、仮定 1 を満足する分岐点 ϕ_c をサステインポイントと呼ぶこととする。命題 2 に示した 2 通りの分岐解のうち、サステインポイントから発現する分岐解は、2 本中 1 本が安定となるか、2 本とも不安定であり、2 本とも安定である場合はない。これは以下の命題にまとめられる。

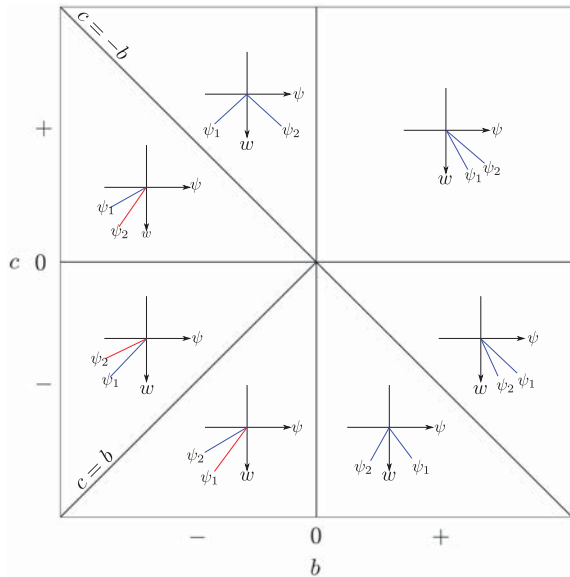


図-2 サステインポイントから発現する分岐解の方向と、その安定性; 赤の実線: 安定; 青の実線: 不安定

命題 3. 仮定 1 が満たされるとき、分岐解の安定性とその方向は次のように場合分けされる:

- $c < b < 0$ であるとき、分岐解 $(\delta\lambda_1, \psi_1)$ のみ安定で、 $\psi_1 < 0$ である。
- $-b > |c|$ であるとき、分岐解 $(\delta\lambda_2, \psi_2)$ のみ安定で、 $\psi_2 < 0$ である。
- それ以外の場合、分岐解 $(\delta\lambda_1, \psi_1), (\delta\lambda_2, \psi_2)$ はともに不安定である。

Proof. 付録 II (4) 節参照. \square

命題 3 にまとめた分岐解の安定性の (b, c) による分類を図-2 に示す。命題 3 は、サステインポイントから発現する分岐は、分岐点における輸送自由度 ϕ_c の値より輸送自由度が低下する方向 ($\psi < 0$, すなわち $\phi < \phi_c$) でのみ安定となりうるという数学的事実を示している。この分岐現象を、輸送自由度が増大するという、経済学的に有意義な逆の方向で観察してみる。まず、 $\phi < \phi_c$ においては、中心巨大都市と周辺の衛星都市が存在するような均衡が安定に存在する。次に、輸送自由度が増加して $\phi = \phi_c$ に到達すると、その衛星都市は中心の巨大都市に完全に吸収されることが分かる。

5. FO モデルの単一中心分布の特性

前章では、一般のモデルを対象に、 λ^{FA} からどのような分岐が生じるかを一般的に明らかにした。本章では、FO モデルを具体例として、 λ^{FA} のサステインポイントからどのように分岐が生じるかを明らかにする。

また、サステインポイントが経済学的パラメータに対してどのような依存性があるかを調べる。

(1) FO モデル

本節では FO モデルの仮定を簡単に紹介する。詳細は付録 I を参照されたい。

N 個の都市が存在する空間を考える。二つの生産要素があり、それぞれ、熟練労働者と非熟練労働者と呼ぶ。熟練労働者は居住する都市を自由に選択できる移動主体であり、その人口分布を $\lambda = (\lambda_i)_{i \in \mathcal{N}}$ で表現する。一方、非熟練労働者は自らが居住する都市を選択できず、各都市に一樣に分布すると仮定する。また、各都市における非熟練労働者の人口は 1 とする ($L = 1 \times N$)。

財の生産部門は二つあり、一つは農業部門、もう一つは工業部門である。農業部門は完全競争部門である。この部門では、収穫一定の技術により、非熟練労働者の労働を生産要素として 1 種類の同質な財が生産される。一方、工業部門は独占的競争部門である。この部門では、収穫逦増の技術により、熟練労働者と非熟練労働者の労働を生産要素として、差別化された財が生産される。差別化された二つの財の代替の弾力性を $\sigma > 1$ とする。また、労働者は、自身の所得の一定割合だけ工業財を消費するものとする。この割合を $\mu \in (0, 1)$ とする。

農業財の輸送費用はゼロとする。工業財は水塊型の技術により輸送されるとする。都市 i, j 間の輸送費用の水準を表現するために、経済全体の輸送自由度を $\phi \in (0, 1)$ とする。そして、都市 i, j 間の輸送自由度を $\phi^{m(i, j)}$ と定義する。このとき、空間割引行列 $D(\phi)$ の要素は $d_{ij} = \phi^{m(i, j)}$ となる。

熟練労働者は自身の効用に基づいて、居住する都市を選択する。都市 i に居住する熟練労働者の間接効用は以下で与えられる:

$$v_i = \frac{\mu}{\sigma - 1} \ln \Delta_i + \ln w_i. \quad (14)$$

ここで、 $\Delta_i = \sum_{k=0}^{N-1} d_{ki} \lambda_k$ である。また、 w_i は都市 i に居住する熟練労働者の賃金であり、 $w = (w_i)_{i \in \mathcal{N}}$ は以下で与えられる:

$$w = \frac{\mu}{\sigma} \left(I - \frac{\mu}{\sigma} D \Delta^{-1} \Lambda \right)^{-1} D \Delta^{-1} \mathbf{1}. \quad (15)$$

ここで、

$$\begin{cases} D = D(\phi), & \Delta = \text{diag}(\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}), \\ \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}), & \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top. \end{cases}$$

(2) $\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ であるときの間接効用

本章では、解析を容易にするために都市の番号を図-3 のように定義する。すなわち、都市 0 の左側に位置する都市を、都市 0 からみて順に $1, 2, \dots, k$ とする。都市 0 の右側も、左側と同じようにして、都市 0 からみ

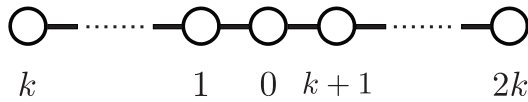


図-3 5章における都市の番号

て順に $k+1, k+2, \dots, 2k$ とする. $\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ における間接効用は次の補題で示される.

補題 2. $\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ であるとき, 都市 i に居住する労働者の間接効用 (14) は次式となる:

$$v_0 = \ln \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right) + \ln(2k+1), \quad (16)$$

$$v_i = \ln \left(\frac{\theta}{1-\theta} \right) + \frac{i\mu}{\sigma-1} \ln \phi + \ln \hat{v}_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (17)$$

ここで,

$$\hat{v}_i = (\theta k + k + 1)\phi^i + (1-\theta) [(k-i)\phi^{-i} + S],$$

$$\theta = \mu/\sigma \in (0, 1), \quad S = \sum_{p=1}^i \phi^{i-2p}.$$

Proof. 付録 III (1) 節参照. \square

次節以降で, 補題 2 で導いた間接効用の性質を調べる. なお, 対称性により, 次節以降の議論では $0 \leq i \leq k$ の範囲で間接効用を調べれば十分であることに注意されたい.

(3) 輸送自由度の変化に伴う間接効用の相対関係

ここでは, 輸送自由度 ϕ の変化に伴う間接効用の大小関係の変化に着目することで, 全ての都市が衛星都市となりうることを明らかにする.

最初に, ϕ が十分 1 に近い場合を考える. このときの間接効用の大小関係を次の補題で示す.

補題 3. $\phi = 1 - \epsilon$ とする ($0 < \epsilon \ll 1$). このとき, 間接効用 (16), (17) について, 次の不等式が成立する:

$$v_0 > v_1 > v_2 > \dots > v_k. \quad (18)$$

Proof. 付録 III (2) 節参照. \square

補題 3 より, 輸送自由度 ϕ が十分 1 に近い場合, J_0 の全ての固有値 $v_i - v_0$ ($i = 1, \dots, 2k$) は負である. すなわち, λ^{FA} は必ず安定である.

では, ϕ が減少していくと, 補題 3 で示された間接効用の大小関係はどのように変化するだろうか? そこで, ϕ が十分小さい場合の, 中心都市以外の間接効用を調べる². まず, v_i の極限 ($\phi \rightarrow 0$) を考える.

² 式 (16) により, v_0 は ϕ の変化に関して不変である.

補題 4. $1 \leq i \leq k$ であるとき, 間接効用は次のように場合分けされる:

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} v_i = \begin{cases} +\infty, & (\mu < \sigma - 1), \\ \ln \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) + \ln(k - i + 1), & (\mu = \sigma - 1), \\ -\infty, & (\mu > \sigma - 1). \end{cases}$$

ここで, $\mu < \sigma - 1$ は FO モデルに対する no-black-hole condition¹⁾ である.

Proof. 付録 III (3) 節参照. \square

補題 4 により, no-black-hole condition が満たされるならば, ϕ が十分低いとき, v_i ($i \neq 0$) が必ず v_0 よりも大きくなり, λ^{FA} は不安定である.

補題 3, 4 を利用することで, サステインポイントの存在について議論することができる.

命題 4. no-black-hole condition ($\mu < \sigma - 1$) が満たされるとき, 次が成立する.

1. $(\lambda^{\text{FA}}, \phi)$ 上に少なくとも k 個の分岐点が存在する.
2. $\phi_s \equiv \max_i \phi_c^i$ と定義すると, $\phi_s < \phi$ において λ^{FA} は安定である.
3. ϕ_s はサステインポイントである.

Proof. 付録 III (4) 節参照. \square

命題 4 は, no-black-hole condition が満たされるとき, 衛星都市が必ず生じることを意味する.

ϕ の変化に伴う v_i の挙動は複雑であり, サステインポイントを解析的に求めることは困難である. 例えば, 補題 3 に示した v_i と v_j ($i \neq j$) の大小関係は, ϕ が小さいとき必ず逆転する.

補題 5. no-black-hole condition ($\mu < \sigma - 1$) が満たされるとき, 間接効用 (16), (17) について, 次の不等式が成立する:

$$v_0 < v_1 < v_2 < \dots < v_k, \quad (\phi \rightarrow +0). \quad (19)$$

Proof. 付録 III (5) 節参照. \square

以降, サステインポイントを陽に求めることはせず, それが経済学的パラメータ (i.e., 財の代替性 σ , 工業財への支出割合 μ) にどのように依存するかを調べる.

(4) σ, μ の変化に伴うサステインポイントの挙動

Fujita, et al.²⁷⁾ は対称な 2 都市を仮定した場合の核周辺モデルにおいて, 集積力が強いとき, すなわち, μ が大きく, σ が小さいときにサステインポイントが低下することを示している. この現象は, 本研究で取り扱

う線分都市経済を仮定した FO モデルでも同様に起こることを示す。

都市 i ($i = 1, 2, \dots, k$) の人口が増加するような分岐点に着目する。与えられた (σ, μ) において、この分岐点がサステインポイント ϕ_s であると仮定しよう。このとき、 σ, μ が微小に変化した場合でも、変わらず都市 i の人口が増加すると仮定して、 σ, μ の変化に対するサステインポイントの挙動を調べる。

補題 6. ϕ_s をサステインポイントとし、 (ϕ_s, σ, μ) の近傍では、 $\max(v_1, \dots, v_k) = v_i$ と仮定する。このとき、

$$\frac{d\phi_s}{d\sigma} > 0, \quad \frac{d\phi_s}{d\mu} < 0.$$

Proof. 付録 III (6) 節参照。□

ここで、 σ が大きいとき、財が代替されやすいことから、工業部門の集積は起こりにくくなると考えられるため、 $d\phi_s/d\sigma > 0$ はこの経済学的直観と合致する。一方、工業部門への支出割合 μ が大きくなれば、逆に集積は起こりやすくなると考えられるため、やはり、 $d\phi_s/d\mu < 0$ は経済学的直観と合致する。なお、これらの直観は競技場経済にもあてはまることが示されている³⁰⁾。

6. 数値解析

FO モデルの線分 9 都市経済を数値解析することで、これまでの理論を検証する。なお、都市数が多い場合には、本論文の線分都市経済と、この経済より対称性が高い、競技場経済の間の差異が減少する²⁶⁾。そのため、競技場経済においても類似した結論が導かれることが予想される。

(1) 衛星都市の発現

まず、 σ, μ の値に応じて λ^{FA} からどのような衛星都市が発現するかを、数値解析によって網羅的に明らかにする。図-4 に、サステインポイントから発現する衛星都市の発生位置と σ, μ の値との関係を示す。

図-4 の結果は、集積力が強いほど (i.e., σ が小、 μ が大)、サステインポイントから、衛星都市は中心都市から離れた場所に位置することが分かる。これは以下の理由による。中心都市から十分離れた点 (中心都市からの輸送費用が十分高い点) に立地する企業は、その立地点近傍 (及び、中心都市より線分の境界側) では中心都市に立地する企業よりも低い価格で財を供給でき、それらの点に立地する非熟練労働者からの需要を集められる。その結果、労働者に対して高い名目賃金を支払うことができる。中心都市に居住する熟練労働者が移住する場合、中心都市において享受できる財の多様性による集積力と、中心都市から離れることで

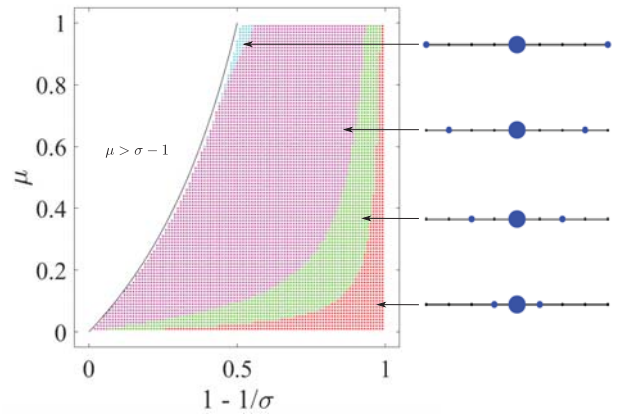


図-4 サステインポイントから発現する分岐解；実線： $\mu = \sigma - 1$

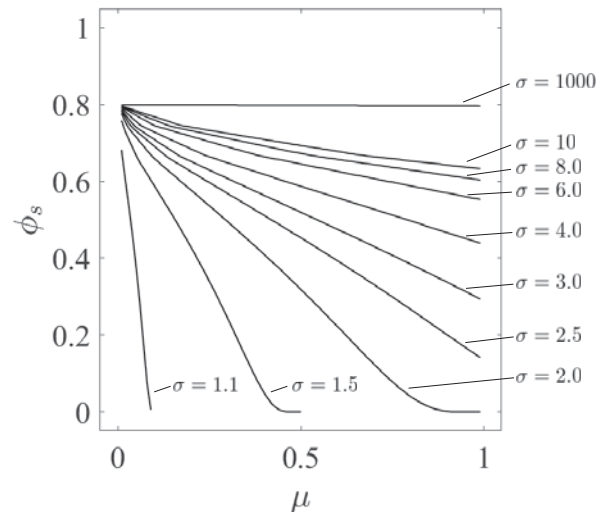


図-5 μ とサステインポイント ϕ_s の対応関係

享受できる相対的に高いとのトレードオフによって意思決定する。従って、集積力が強い場合には、それに応じて十分遠くに離れた立地点に移住しなければ中心都市と同一の効用は達成できない。そのため、衛星都市は集積力が強いほど遠くに形成される。

ここで、補題 6 により、 σ が大きいほど、また、 μ が小さいほど、サステインポイントは大きくなると予想できる。これを検証するために、 σ の値を様々に変化した場合の、 μ と、それに対応するサステインポイントを図-5 に示す。

図-4, 5 から、FO モデルの仮定のもとでは、消費者が工業財を消費することを志向するほど、より低い輸送自由度で、かつ、衛星都市が中心都市からより離れた場所に位置することが分かる。ただし、サステインポイントも小さくなるため、都市間交通を改善したとき、

安定な均衡が単一中心分布にシフトすることで、衛星都市が消滅しやすいということも意味している。

(2) 経路追跡

FO モデルの均衡解の経路追跡を行うことで、FO モデルの単一中心分布からの分岐特性と、 ϕ の変化に伴う大局的な集積の変遷を調べる。図-6 に経路追跡の結果を示す。

図-6 において、単一中心分布上に分岐点が四つ存在しており、そのうち一つがサステインポイントである。ここで、 $(\sigma, \mu) = (6.0, 0.4)$ であるので、no-black-hole condition が満たされている。そのため、命題 4 の、分岐点の数が $(k=)4$ 以上であるという理論予測と合致している。

また、サステインポイントから発現する分岐解：B は分岐直後も安定であり、 ϕ が減少する方向に発現している（命題 3）。一方、（サステインポイントではないという意味で）通常に分岐点から発現する分岐解：C は、分岐直後は不安定であるが、その後は安定となっている。分岐解 B を輸送自由度が増大する方向で観察すると、中心都市が衛星都市と共存する状況から、中心都市への一極集中へと安定に移行することを示している。この結果は、衛星都市が中心都市からどれだけ離れていても、交通システムの発展は衛星都市の消滅をもたらすことを意味する。

7. おわりに

本論文では、線分都市経済の単一中心型分布からの分岐特性を一般的に明らかにした（命題 2）。この分岐特性の解明にあたって、端点解における、人口が存在する都市と存在しない都市との間の人口移動が発生する分岐に着目した。

従来、対称性が高い空間における分岐の研究は、ブレイクポイントからの分岐を含め、人口が存在する都市間の人口移動が発生する分岐に焦点が当てられてきた。これらの分岐特性は輸送自由度の増大に伴ってどのように人口集積が生じるのかという問題に焦点を当てるものである。一方、本研究で明らかにした分岐特性は、単一中心型分布のような、すでに集積した経済は、どのような集積から変遷した結果なのかという問題に焦点を当てるものである。

その分岐特性は 4 章の命題にまとめられる。4 章の命題により、間接効用の比較のみで、衛星都市の創発を議論できることを一般的に明らかにした。実際、この議論と数値解析を相補的に組み合わせることで、衛星都市が、その都市の位置にかかわらず、輸送自由度の増加に伴って消滅し、一極集中が発生する安定な過程

が存在することを示した。

また、一般論の応用例として FO モデルを分析した。FO モデルの分析結果として、消費者が工業材の消費を志向するほど、あるいは、財の代替性が低いほど、より低い輸送自由度で集積が起こりやすくなるということを経理的に明らかにした。また、そのとき、衛星都市（命題 2）は中心都市から離れた箇所で生じる傾向にあることが数値解析を通じて明らかとなった。

4 章の結果は、方程式の対称性に着目した一般論である。そのため、線分都市経済を想定した他の NEG モデルにも応用可能である。この理論をより現実に近い NEG モデル²⁵⁾ の解析に拡張するのは今後の課題とする。

もう一つの課題は、他の代表的な端点解における分岐解析である。例えば、6 章では 2 都市に対称に分布するような端点解が安定になることが数値的に明らかになっている。このような端点解及びその分岐解の安定性は、現実にもみられるような多極的な人口分布の安定性に関わるため、重要である。

謝辞： 本研究は日本学術振興会・科学研究費補助金（課題番号：18K18874）の助成金を受けた研究の一部です。ここに記し、感謝の意を表します。

付録 I FO モデルの詳細

(1) 消費者

都市 i に居住する労働者の効用 U をコブ・ダグラス型とする：

$$U(C_i^M, C_i^A) = \mu \ln C_i^M + (1 - \mu) \ln C_i^A. \quad (I.1)$$

ここで、 $\mu \in (0, 1)$ は、工業財への支出の割合である。また、 C_i^A は農業部門で生産された財の消費量、 C_i^M は工業部門で生産された合成財の消費の指数である。右下の添字 i は、都市 i で消費されることを意味する。 C_i^M を以下の CES 関数で表現する：

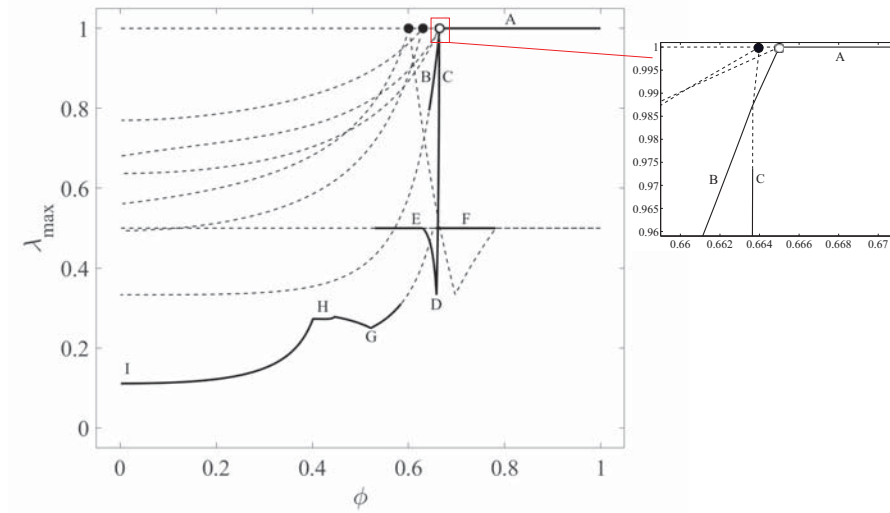
$$C_i^M = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{n_j} q_{ji}(\ell)^{(\sigma-1)/\sigma} d\ell \right)^{\sigma/(\sigma-1)} \quad (I.2)$$

ここで、 $q_{ji}(\ell)$ は、都市 j で生産されたバラエティ $\ell \in [0, n_j]$ の、都市 i における消費量である。 n_j は都市 j で生産されるバラエティ数である。また、 $\sigma > 1$ は二つのバラエティ間の代替の弾力性である。

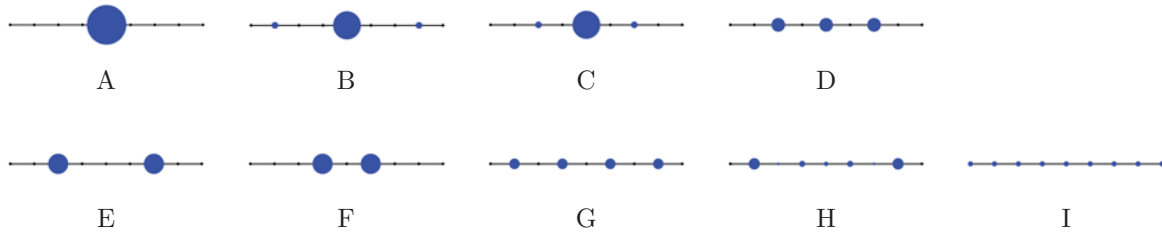
予算制約式は次式で与えられる：

$$p_i^A C_i^A + \sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{n_j} p_{ji}(\ell) q_{ji}(\ell) d\ell = Y_i. \quad (I.3)$$

ここで、 p_i^A は都市 i における農業部門の財の価格、 $p_{ji}(\ell)$ は都市 j で生産され、都市 i におけるバラエティ ℓ の価格、 Y_i は都市 i における主体の所得である。熟練労働



(a) 経路追跡; 縦軸: $\max_i (\lambda_i)_{i \in \mathcal{N}}$; 実線: 安定; 破線: 不安定; ●: 分岐点; ○: サステインポイント



(b) 安定な均衡の空間分布

図-6 FO モデルの均衡解; $(\sigma, \mu) = (6.0, 0.4)$

者の所得と非熟練労働者の所得を、それぞれ、 w_i, w_i^L とする。

都市 i における主体は、所得制約 (I.3) のもとで、効用を最大化するものとする。この効用最大化問題により、次の需要関数が導かれる：

$$C_i^A = (1 - \mu) \frac{Y_i}{p_i^A}, \quad C_i^M = \mu \frac{Y_i}{\rho_i}, \quad q_{ji}(\ell) = \mu \frac{p_{ji}(\ell)^{-\sigma} Y_i}{\rho_i^{1-\sigma}}.$$

ここで、 ρ_i は都市 i における差別化された財の価格指数であり、次式で与えられる：

$$\rho_i = \left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_0^{n_j} p_{ji}(\ell)^{1-\sigma} d\ell \right)^{1/(1-\sigma)}. \quad (\text{I.4})$$

都市 i における総所得は $w_i \lambda_i + w_i^L$ であるから、都市 j で生産されたバラエティ ℓ に対する、都市 i の総需要 $Q_{ji}(\ell)$ は次式で与えられる：

$$Q_{ji}(\ell) = \mu \frac{p_{ji}(\ell)^{-\sigma}}{\rho_i^{1-\sigma}} (w_i \lambda_i + w_i^L). \quad (\text{I.5})$$

(2) 生産者

熟練労働者と非熟練労働者は、各財を 1 単位生産するための労働力を非弾力的に供給する。

農業部門では、収穫一定技術かつ完全競争のもとで同質な財が生産されるものとする。農業部門で生産される財は、1 単位の財あたり、1 単位の非熟練労働者の投入によって生産される。農業部門の財は輸送費用ゼロで都市間で輸送され、財の価格はニューメレールとする。そのため、各都市 i において $p_i^A = w_i^L = 1$ である。

工業部門では、収穫逡増の技術かつ Dixit & Stiglitz 型の独占的競争のもとで財が生産されるものとする。企業は熟練労働者 α 単位の固定投入と、非熟練労働者 β 単位の限界投入のもとで財を生産するものとする。都市 i における工業部門の企業は財の価格 $(p_{ij}(\ell) \mid j = 0, \dots, N-1)$ を、次の利潤最大化のもとで決定する：

$$\Pi_i(\ell) = \sum_{j=0}^{N-1} p_{ij}(\ell) Q_{ij}(\ell) - (\alpha w_i + \beta \chi_i(\ell)). \quad (\text{I.6})$$

ここで、 $\chi_i(\ell)$ は、都市 i で生産されたバラエティ ℓ の

総供給である。また、 $\alpha w_i + \beta \chi_i(\ell)$ は費用関数である。

氷塊型の輸送費用を仮定するので、 $\chi_i(\ell)$ は次式で与えられる：

$$\chi_i(\ell) = \sum_{j=0}^{N-1} \tau_{ij} Q_{ij}(\ell). \quad (\text{I.7})$$

都市 i における工業部門の企業の利潤関数 (I.6) を次式に書き換えることができる：

$$\Pi_i(\ell) = \sum_{j=0}^{N-1} p_{ij}(\ell) Q_{ij}(\ell) - \left(\alpha w_i + \beta \sum_{j=0}^{N-1} \tau_{ij} Q_{ij}(\ell) \right). \quad (\text{I.8})$$

企業は利潤関数 (I.8) を最大とするように財の価格を決定すると考える。利潤最大化の一階条件により、次式が与えられる：

$$p_{ij}(\ell) = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \tau_{ij}. \quad (\text{I.9})$$

式 (I.9) により、 $p_{ij}(\ell), Q_{ij}(\ell), \chi_i(\ell)$ は ℓ によらない関数である。そこで、以降の議論では、 (ℓ) を除外する。

(3) 輸送費用

$\tau > 0$ を輸送費用パラメータとし、 $\tau_{ij} = \tau_{ij}(\tau)$ を次のように定義する：

$$\tau_{ij}(\tau) = \exp(\tau m(i, j)). \quad (\text{I.10})$$

ここで、 $m(i, j)$ は都市 i, j 間のリンク数である。

二つの変数を導入する。まず、 d_{ij} を次式で定義する：

$$d_{ji} = \tau_{ji}^{1-\sigma}. \quad (\text{I.11})$$

d_{ji} は都市 j, i 間の地域間距離に比例した摩擦を表現する。次に、輸送自由度を次式で定義する：

$$\phi = \exp(-\tau(\sigma - 1)). \quad (\text{I.12})$$

ここで、 $\tau > 0$ であるので $0 < \phi < 1$ である。このとき、 $d_{ij} = \phi^{m(i, j)}$ のように表現できる。

(4) 短期均衡

短期では、熟練労働者は居住する都市を移動できないものとする。つまり、 $\lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_N)$ は所与であるとする。短期均衡の条件は三点ある。一点目は、市場清算条件である。二点目は、企業の自由参入・撤退を仮定することによる企業のゼロ利潤条件である。三点目は、熟練労働者の市場清算条件である。一点目の条件は、式 (I.7) によって、すでに与えられている。二点目の条件は、 $\Pi_i(\ell) = 0$ であることを意味するから、式 (I.8) によって与えられている利潤最大化式において、熟練労働者の賃金について解けることを意味する：

$$w_i = \frac{1}{\alpha} \left(\sum_{j=0}^{N-1} p_{ij} Q_{ij} - \beta \sum_{j=0}^{N-1} \tau_{ij} Q_{ij} \right). \quad (\text{I.13})$$

三点目の条件は、 $\alpha n_i = \lambda_i$ として表現されるので、価格指数 (I.4) は次式となる：

$$\rho_i = \frac{\sigma \beta}{\sigma - 1} \left(\frac{1}{\alpha} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda_j d_{ji} \right)^{1/(1-\sigma)}. \quad (\text{I.14})$$

式 (I.13) に Q_{ij} を代入することにより、熟練労働者の賃金 w_i は次式で与えられる：

$$w_i = \frac{\mu}{\sigma} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{d_{ij}}{\Delta_j} (w_j \lambda_j + 1). \quad (\text{I.15})$$

ここで、 $\Delta_j = \sum_{k=0}^N d_{kj} \lambda_k$ である。式 (I.15) は、 w_i について陽に解くことができる。まず、式 (I.15) をベクトル形式で書くと次式となる：

$$\mathbf{w} = \frac{\mu}{\sigma} D \Delta^{-1} (\Lambda \mathbf{w} + \mathbf{1}). \quad (\text{I.16})$$

ここで、

$$\begin{cases} \mathbf{w} = (w_i)_{i \in \mathcal{N}}, & D = D(\phi), \\ \Delta = \text{diag}(\Delta_0, \dots, \Delta_{N-1}), \\ \Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \dots, \lambda_{N-1}), & \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top. \end{cases}$$

式 (I.16) を \mathbf{w} について解くと次式で与えられる：

$$\mathbf{w} = \frac{\mu}{\sigma} \left(I - \frac{\mu}{\sigma} D \Delta^{-1} \Lambda \right)^{-1} D \Delta^{-1} \mathbf{1}. \quad (\text{I.17})$$

式 (I.1), (I.14) をまとめると、都市 i の熟練労働者の間接効用 v_i は以下で与えられる：

$$v_i = \frac{\mu}{\sigma - 1} \ln \Delta_i + \ln w_i. \quad (\text{I.18})$$

ここで、式中の定数項は結果に影響を与えないので無視した。

付録 II 4章の命題、補題の証明

ここでは、4章で取り上げた命題と補題の証明を示す。

(1) 命題 1 の証明

与えられた支配方程式 (4)：

$$F_i(\lambda, \phi) = \lambda_i (v_i(\lambda, \phi) - \bar{v}(\lambda, \phi)) = 0, \quad i \in \mathcal{N} \quad (\text{II.1})$$

から分岐方程式を導出する。

まず、 $(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ では $v_1 - v_0 = 0$ であるので、支配方程式 (II.1) のヤコビ行列 $J_c \equiv J(\lambda^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ は次式となる：

$$J_c = \begin{pmatrix} -v_0 & -v_0 \mathbf{1}_2 & -v_3 \mathbf{1}_2 & \cdots & -v_{2k-1} \mathbf{1}_2 \\ 0 \times I_2 & (v_3 - v_0) I_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & (v_{2k-1} - v_0) I_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{II.2})$$

分岐点からの増分量を考えるために、 λ, ϕ を次のように分解する：

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda^{\text{FA}} + \mathbf{w} + \bar{\mathbf{w}}, \\ \phi &= \phi_c^1 + \psi, \quad \psi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\mathbf{w} \in \ker(J_c), \quad \bar{\mathbf{w}} \in (\ker(J_c))^\perp.$$

$\ker(J_c)$ は $J_c \boldsymbol{\eta} = \mathbf{0}$ を満足するベクトル空間である:

$$\begin{aligned} \ker(J_c) = \\ \{\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^2 \mid \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 = 0, \eta_j = 0, j = 3, \dots, 2k\}. \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

$\ker(J_c)$ を張るベクトルを次のようにとる:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_1 &= (-1, 1, 0, 0, 0, \dots, 0), \\ \boldsymbol{\eta}_2 &= (-1, 0, 1, 0, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

このように定式化すると,

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{\eta}_2 \quad (\text{II.4})$$

と表すことができる. 次に, $(\ker(J_c))^\perp$ を張るベクトルを次のようにとる:

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}_0 = (1, 1, \dots, 1), \quad (\text{II.5})$$

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\eta}}_j &= (0, 0, 0, \underbrace{0, \dots, 0}_{j-3}, 1, \underbrace{0, \dots, 0}_{2k-j}, 0), \\ &\quad (j = 3, 4, \dots, 2k). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

このように定式化すると,

$$\bar{\mathbf{w}} = x \bar{\boldsymbol{\eta}}_0 + \sum_{j=3}^{2k} \lambda_j \bar{\boldsymbol{\eta}}_j, \quad x \in \mathbb{R} \quad (\text{II.7})$$

と表すことができる. したがって,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} = \\ (1 - \lambda_1 - \lambda_2 + x, \lambda_1 + x, \lambda_2 + x, \dots, \lambda_{2k} + x). \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

受動変数: $\bar{\mathbf{w}}$ を消去する. まず, F_j ($3 \leq j$) に着目する. $(\boldsymbol{\lambda}^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ において, $v_j - \bar{v} \neq 0$ ($j = 3, 4, \dots, 2k$) であるので, 関数の連続性により, $(\boldsymbol{\lambda}^{\text{FA}}, \phi_c^1)$ 近傍では $v_j - \bar{v} \neq 0$ である. したがって,

$$\lambda_j = 0, \quad j = 3, 4, \dots, 2k. \quad (\text{II.9})$$

次に, 空間分布の条件に着目する:

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_i = 1. \quad (\text{II.10})$$

ここで,

$$\sum_{i=0}^{2k} \lambda_i = 1 + (2k+1)x \quad (\text{II.11})$$

であるので, 式(II.11)を式(II.10)に代入すれば, $x = 0$ であることは明らかである. 以上により, $\bar{\mathbf{w}}$ は全て消去された.

分岐方程式を導出する. まず, $\boldsymbol{\xi}^\top J_c = \mathbf{0}^\top$ を満足するベクトルを次のようにとる:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = (0, 1, 0, 0, 0, \dots, 0)^\top, \quad (\text{II.12})$$

$$\boldsymbol{\xi}_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots, 0)^\top. \quad (\text{II.13})$$

分岐方程式は支配方程式(II.1)とベクトル(II.12),(II.13)との内積である²⁹⁾:

$$\tilde{F}_1(\lambda_1, \lambda_2, \psi) = \lambda_1(v_1 - \bar{v}) = \lambda_1(v_1 - v_0), \quad (\text{II.14})$$

$$\tilde{F}_2(\lambda_1, \lambda_2, \psi) = \lambda_2(v_2 - \bar{v}) = \lambda_2(v_2 - v_0). \quad (\text{II.15})$$

ここで, 次式:

$$F_0 = (1 - \lambda_1 - \lambda_2)(v_0 - \bar{v}) = 0$$

により, $\bar{v} = v_0$ であることを利用した.

分岐方程式(II.14),(II.15)の一般形を導出する. まず, 受動変数を消去したことにより, v_0, v_1, v_2 は $\lambda_1, \lambda_2, \psi$ の関数となる:

$$\begin{aligned} v_i &= v_i(1 - \lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2, \mathbf{0}_{2k-3}, \psi), \\ i &= 0, 1, 2. \end{aligned}$$

そこで, $g(\lambda_1, \lambda_2, \psi) \equiv v_1 - v_0$ とし, g を級数形で考える:

$$g(\lambda_1, \lambda_2, \psi) = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} A_{ab}(\psi) \lambda_1^a \lambda_2^b, \quad (\text{II.16})$$

ここで, 同変性を利用すると $v_2 - v_0 = g(\lambda_2, \lambda_1, \psi)$ である. したがって,

$$v_2 - v_0 = \sum_{a=0}^{\infty} \sum_{b=0}^{\infty} A_{ab}(\psi) \lambda_2^a \lambda_1^b. \quad (\text{II.17})$$

また, $(\lambda_1, \lambda_2, \psi) = (0, 0, 0)$ は分岐点であるので,

$$\left. \frac{\partial \tilde{F}_1}{\partial \lambda_1} \right|_{(\lambda_1, \lambda_2, \psi)=(0,0,0)} = 0 \quad (\text{II.18})$$

なので, $A_{00}(0) = 0$ である. したがって, $A_{00}(\psi) \approx A'_{00}(0)\psi$ と近似できる. さらに, $A_{ab}(0) \neq 0$ である場合には, $A_{ab}(\psi) \approx A_{ab}(0)$ と近似できる.

以上により, 分岐方程式の漸近形は次式となる:

$$\tilde{F}_1 \approx x_1[A'_{00}(0)\psi + A_{10}(0)x_1 + A_{01}(0)x_2], \quad (\text{II.19})$$

$$\tilde{F}_2 \approx x_2[A'_{00}(0)\psi + A_{10}(0)x_2 + A_{01}(0)x_1]. \quad (\text{II.20})$$

なお, $A'_{00}(0), A_{10}(0), A_{01}(0)$ は以下で与えられる:

$$A'_{00}(0) = \left. \frac{\partial g}{\partial \phi} \right|_{(\lambda_1, \lambda_2, \psi)=(0,0,0)},$$

$$A_{10}(0) = \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} \right|_{(\lambda_1, \lambda_2, \psi)=(0,0,0)},$$

$$A_{01}(0) = \left. \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} \right|_{(\lambda_1, \lambda_2, \psi)=(0,0,0)}.$$

(2) 命題2の証明

\tilde{F}_1, \tilde{F}_2 に $(\lambda_1, \lambda_2) = w(1, 0)$ を代入する:

$$\tilde{F}_1 \approx w_1(A'_{00}(0)\psi + A_{10}(0)w_1), \quad (\text{II.21})$$

$$\tilde{F}_2 = 0. \quad (\text{II.22})$$

したがって, 漸近的に分岐解は次式となる:

$$\psi \approx -\frac{A_{10}(0)w}{A'_{00}(0)}. \quad (\text{II.23})$$

一方, \tilde{F}_1, \tilde{F}_2 に $(\lambda_1, \lambda_2) = w(1, 1)$ を代入する:

$$\tilde{F}_1 = \tilde{F}_2 \approx w_2(A'_{00}(0)\psi + A_{10}(0)w_2 + A_{01}(0)w_2). \quad (\text{II.24})$$

したがって, 漸近的に分岐解は次式となる:

$$\psi \approx -\frac{(A_{10}(0) + A_{01}(0))w}{A'_{00}(0)}. \quad (\text{II.25})$$

(3) 補題 1 の証明

分岐方程式のヤコビ行列を次に示す:

$$J \approx \begin{pmatrix} J_{11} & A_{01}(0)x_1 \\ A_{01}(0)x_2 & J_{22} \end{pmatrix}. \quad (\text{II.26})$$

ここで,

$$J_{11} = A'_{00}(0)\psi + 2A_{10}(0)x_1 + A_{01}(0)x_2,$$

$$J_{22} = A'_{00}(0)\psi + 2A_{10}(0)x_2 + A_{01}(0)x_1.$$

ヤコビ行列に $(x_1, x_2) = w_1(1, 0), \psi = \psi_1$ を代入する:

$$J \approx w_1 \begin{pmatrix} A_{10}(0) & A_{01}(0) \\ 0 & A_{01}(0) - A_{10}(0) \end{pmatrix}. \quad (\text{II.27})$$

ヤコビ行列の固有値は次のようになる:

$$e_1 \approx A_{10}(0)w_1, \quad (\text{II.28})$$

$$e_2 \approx (A_{01}(0) - A_{10}(0))w_1. \quad (\text{II.29})$$

一方, $(x_1, x_2) = w_2(1, 1), \psi = \psi_2$ をヤコビ行列に代入すると,

$$J \approx w_2 \begin{pmatrix} A_{10}(0) & A_{01}(0) \\ A_{01}(0) & A_{10}(0) \end{pmatrix} \quad (\text{II.30})$$

であるので, 固有値は次のようになる:

$$e_1 \approx (A_{10}(0) + A_{01}(0))w_2, \quad (\text{II.31})$$

$$e_2 \approx (A_{10}(0) - A_{01}(0))w_2. \quad (\text{II.32})$$

(4) 命題 3 の証明

$(x_1, x_2) = (0, 0)$ であるとき, ヤコビ行列は

$$J = A'_{00}(0)\psi I \quad (\text{II.33})$$

であるので, 固有値は $A'_{00}(0)\psi$ である. ここで, 仮定 1 が満たされるとすると, 分岐前が安定であるので, $A'_{00}(0) < 0$ である.

$(\delta\lambda_1, \psi_1)$ の安定性を考える. $A_{10}(0) < 0$ かつ $A_{01}(0) - A_{10}(0) < 0$ であるとき, ψ_1 は安定である. 二つの不等式から $A_{01}(0) < A_{10}(0) < 0$ が成立する. また, $A_{10}(0) < 0, A'_{00}(0) < 0, w > 0$ であるので, 分岐解 (II.23) の符号に着目すると, $\psi_1 < 0$ である.

次に, $(\delta\lambda_2, \psi_2)$ の安定性を考える. $A_{10}(0) - A_{01}(0) < 0$ かつ $A_{10}(0) + A_{01}(0) < 0$ であるとき, ψ_2 は安定である. 二つの不等式から $A_{10}(0) < A_{01}(0) < -A_{10}(0)$ が成立する. ここで, $0 < A_{10}(0)$ とすると矛盾が生じるから, $A_{10}(0) < 0$ である. したがって, $-A_{10}(0) > |A_{01}(0)|$ である. $A_{10}(0) + A_{01}(0) < 0, A'_{00}(0) < 0, w > 0$ であ

るので, 分岐解 (II.25) の符号に着目すると, $\psi_2 < 0$ である.

付録 III 5 章の命題, 補題の証明

5 章で取り上げた命題と補題の証明を示す. これらの証明において, $\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ であるときの間接効用 (16), (17) が多用されるので, 具体形を再掲しておく:

$$v_0 = \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + \ln(2k + 1), \quad (\text{III.1})$$

$$v_i = \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + \frac{i\mu}{\sigma - 1} \ln \phi + \ln \hat{v}_i, \quad 1 \leq i \leq k. \quad (\text{III.2})$$

ここで,

$$\hat{v}_i = (\theta k + k + 1)\phi^i + (1 - \theta) [(k - i)\phi^{-i} + S], \quad (\text{III.3})$$

$$\theta = \mu/\sigma \in (0, 1), \quad S = \sum_{p=1}^i \phi^{i-2p}. \quad (\text{III.4})$$

(1) 補題 2 の証明

まず, $\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ であるときの賃金 w を導く. 初めに, 都市の番号が図-3 のように振られているとき, 空間割引行列 D は次式となる:

$$D = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & D_1 & D_1 \\ \hline D_1^\top & D_2 & D_3 \\ \hline D_1^\top & D_3 & D_2 \end{array} \right). \quad (\text{III.5})$$

ここで,

$$D_1 = (\phi, \phi^2, \dots, \phi^k),$$

$$D_2 = \{D_{2,ij} = \phi^{|j-i|} \mid 1 \leq i, j \leq k\},$$

$$D_3 = \{D_{3,ij} = \phi^{|i+j|} \mid 1 \leq i, j \leq k\}.$$

$\lambda = \lambda^{\text{FA}}$ であるとき,

$$(\Delta_0, \Delta_1, \dots, \Delta_{2k}) = (1, D_1, D_1) \quad (\text{III.6})$$

であるので, Δ は次式となる:

$$\Delta = \text{diag}(1, D_1, D_1).$$

$\Theta = [\text{diag}(D_1)]^{-1}$ とすると,

$$\begin{aligned} D\Delta^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & D_1 & D_1 \\ \hline D_1^\top & D_2 & D_3 \\ \hline D_1^\top & D_3 & D_2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline & \Theta & \\ \hline & & \Theta \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & D_1\Theta & D_1\Theta \\ \hline D_1^\top & D_2\Theta & D_3\Theta \\ \hline D_1^\top & D_3\Theta & D_2\Theta \end{array} \right). \end{aligned}$$

であるので, $D\Delta^{-1}\mathbf{1}, D\Delta^{-1}\Lambda$ はそれぞれ次式となる:

$$D\Delta^{-1}\mathbf{1} = \begin{pmatrix} N \\ \Psi \\ \Psi \end{pmatrix},$$

$$D\Delta^{-1}\Lambda = \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline D_1^\top & & \\ \hline D_1^\top & & \end{array} \right).$$

ここで,

$$N = 2k + 1,$$

$$\Psi = ((k+1)\phi^i + (k-i)\phi^{-i} + S \mid 1 \leq i \leq k),$$

$$S = \sum_{p=1}^i \phi^{i-2p}$$

続けて, $k \times k$ の単位行列を I_k とすると,

$$I_N - \theta D\Delta^{-1}\Lambda = \left(\begin{array}{c|c|c} 1-\theta & & \\ \hline -\theta D_1^\top & I_k & \\ \hline -\theta D_1^\top & & I_k \end{array} \right).$$

であるので, 掃き出し法により, 容易に逆行列を計算することができる:

$$(I - \theta D\Delta^{-1}\Lambda)^{-1} = \frac{1}{1-\theta} \left(\begin{array}{c|c|c} 1 & & \\ \hline \theta D_1^\top & (1-\theta)I_k & \\ \hline \theta D_1^\top & & (1-\theta)I_k \end{array} \right).$$

したがって,

$$(I_N - \theta D\Delta^{-1}\Lambda)^{-1} D\Delta^{-1}\mathbf{1} = \frac{1}{1-\theta} \begin{pmatrix} N \\ \theta N D_1^\top + (1-\theta)\Psi \\ \theta N D_1^\top + (1-\theta)\Psi \end{pmatrix}. \quad (\text{III.7})$$

式 (III.7) を賃金 (15) に代入する:

$$w_0 = \frac{\theta(2k+1)}{1-\theta}, \quad (\text{III.8})$$

$$w_i = w_{i+k} = \frac{\theta}{1-\theta} \{ (\theta k + k + 1) \phi^i + (1-\theta) [(k-i)\phi^{-i} + S] \},$$

$$1 \leq i \leq k. \quad (\text{III.9})$$

式 (III.6), (III.8), (III.9) を式 (14) に代入すると, 式 (III.1), (III.2) が導かれる.

(2) 補題 3 の証明

$\phi \approx 1$ ($\phi < 1$) であるとき, $v_i > v_{i+1}$ ($0 \leq i \leq k-1$) を示すことができれば補題は証明される. そこで, $\phi = 1 - \epsilon$ ($0 < \epsilon \ll 1$) であるときの $v_i - v_{i+1}$ を近似計算することで, 上の不等式を証明することとする.

v_i を $\phi = 1$ 近傍でテイラー展開するために v_i ($1 \leq i$) の項について考える. まず, v_i の第二項に着目する.

$$\frac{\partial(\ln \phi)}{\partial \epsilon} = \frac{1}{1-\epsilon}$$

であるので, 第二項を次のようにテイラー展開できる:

$$\frac{i\mu}{\sigma-1} \ln \phi \approx -\frac{i\mu}{\sigma-1} \epsilon. \quad (\text{III.10})$$

次に, v_i の第三項に着目する. $\ln \hat{v}_i$ を偏微分する:

$$\frac{\partial(\ln \hat{v}_i)}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{\hat{v}_i} \{ (i(\theta k + k + 1)(1-\epsilon)^{i-1} + (1-\theta)[i(i-k)(1-\epsilon)^{-(i+1)} + \hat{S}] \}.$$

ここで,

$$\hat{S} = \sum_{p=1}^i (i-2p)(1-\epsilon)^{i-2p-1}.$$

$\phi = 1$ であるとき, 偏微分係数は次式となる:

$$\left. \frac{\partial(\ln \hat{v}_i)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = -\left(\theta i + \frac{(1-\theta)i^2}{2k+1} \right).$$

したがって, v_i の第三項を次のようにテイラー展開できる:

$$\ln \hat{v}_i \approx \ln(2k+1) - \left(\theta i + \frac{1-\theta}{2k+1} i^2 \right) \epsilon. \quad (\text{III.11})$$

式 (III.10), (III.11) を間接効用 (III.2) に代入する:

$$v_i \approx \ln \left(\frac{\theta(2k+1)}{1-\theta} \right) - \left[\left(\theta + \frac{\mu}{\sigma-1} \right) i + \frac{1-\theta}{2k+1} i^2 \right] \epsilon$$

$$= v_0 - \left[\left(\theta + \frac{\mu}{\sigma-1} \right) i + \frac{1-\theta}{2k+1} i^2 \right] \epsilon,$$

$$1 \leq i \leq k-1. \quad (\text{III.12})$$

$0 < \theta < 1$ であるので, 式 (III.12) により, $v_0 < v_i$ ($1 \leq i \leq k-1$) は明らかである. また, 次式も成立する:

$$v_i - v_{i+1} \approx \left[\theta + \frac{\mu}{\sigma-1} + \frac{(1-\theta)(2i+1)}{2k+1} \right] \epsilon > 0. \quad (\text{III.13})$$

したがって, 次式が示される:

$$v_0 > v_1 > v_2 > \cdots > v_k.$$

(3) 補題 4 の証明

極限計算を容易にするために, v_i (式 (III.2)) の第三項を変形する. ただし, 式変形する前に, v_i の第三項を次のように表記する:

$$\ln \hat{v}_i = \ln (A\phi^i + B\phi^{-i} + CS). \quad (\text{III.14})$$

ここで,

$$A \equiv \theta k + k + 1 > 0,$$

$$B \equiv (1-\theta)(k-i) > 0,$$

$$C \equiv 1-\theta > 0.$$

式 (III.14) における S (式 (III.4) 参照) は, 等比数列の和の公式を利用すると次式となる:

$$S = \frac{\phi^i - \phi^{-i}}{\phi^2 - 1}. \quad (\text{III.15})$$

式 (III.15) を利用すると, 式 (III.14) を次のように変形できる:

$$\begin{aligned} \ln \left(A\phi^i + B\phi^{-i} + C\frac{\phi^i - \phi^{-i}}{\phi^2 - 1} \right) = \\ \ln \left(\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i} + \left(B - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \right) \\ - i \ln \phi. \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

式 (III.16) を v_i に代入する:

$$\begin{aligned} v_i = \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + (\rho - 1)i \ln \phi \\ + \ln \left(\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i} + \left(B - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

ここで,

$$\rho = \frac{\mu}{\sigma - 1}, \quad \rho \in (0, \infty).$$

式 (III.17) の第二項における対数と, 第三項における対数の極限をとる:

$$\lim_{\phi \rightarrow +0} \ln \phi = -\infty, \quad (\text{III.18})$$

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow +0} \ln \left(\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i} + \left(B - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \right) \\ = \ln(B + C). \end{aligned} \quad (\text{III.19})$$

式 (III.18), (III.19) を式 (III.17) に代入すると, v_i の極限は次式となる:

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow 0} v_i = \\ \begin{cases} +\infty, & (\mu < \sigma - 1), \\ \ln \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right) + \ln(k - i + 1), & (\mu = \sigma - 1), \\ -\infty, & (\mu > \sigma - 1). \end{cases} \end{aligned}$$

(4) 命題 4 の証明

1. 中間値の定理, 補題 3,4 により, $v_i - v_0 = 0$ ($1 \leq i \leq k$) を満足するような $\phi = \phi_c^i$ が存在する. また, 命題 2 により, ϕ_c^i は分岐点である.
2. 補題 3 と v_i の連続性により, $\phi_s < \phi$ では $v_i - v_0 < 0$ であるので, $\phi_s < \phi$ では安定である.
3. v の微分可能性により, 分岐点 ϕ_s を境として安定性が変化する. ここで, ϕ_s は仮定 1 を満足するのでサステインポイントである.

(5) 補題 5 の証明

前節と同様, $\rho = \mu/(\sigma - 1)$ とする.

まず, $v_0 < v_i$ ($i \neq 0$) を示す. $\mu < \sigma - 1$, すなわち $\rho < 1$ と仮定するので, $v_0 < +\infty$ であることと, 補題 4 により,

$$v_0 < v_i, \quad (\phi \rightarrow 0, i \neq 0). \quad (\text{III.20})$$

次に, $v_i < v_{i+1}$ ($1 \leq i \leq k-1$) を示す. この不等式を示すために, $v_{i+1} - v_i$ を導く. 前節と同様の論理により, v_i は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} v_i = \ln \left(\frac{\theta}{1 - \theta} \right) + (\rho - 1)i \ln \phi \\ + \ln \left(\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i} + \left(B - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

ここで, B は i の関数であるから, 以降, $B(i)$ と表記する. 式 (III.21) を利用すると, $v_{i+1} - v_i$ は次式となる:

$$v_{i+1} - v_i = (\rho - 1) \ln \phi + V(\phi). \quad (\text{III.22})$$

ここで,

$$\begin{aligned} V(\phi) = \\ \ln \left(\frac{\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i+2} + \left(B(i+1) - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right)}{\left(A + \frac{C}{\phi^2 - 1} \right) \phi^{2i} + \left(B(i) - \frac{C}{\phi^2 - 1} \right)} \right). \end{aligned}$$

$V(\phi)$ の極限は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow +0} V(\phi) &= \ln \left(\frac{B(i+1) + C}{B(i) + C} \right) \\ &= \ln \left(\frac{k - i}{k - i + 1} \right) \end{aligned}$$

$\rho < 1$ を仮定するので, $v_{i+1} - v_i$ の極限は以下で与えられる:

$$\begin{aligned} \lim_{\phi \rightarrow +0} (v_{i+1} - v_i) \\ = (\rho - 1) \left(\lim_{\phi \rightarrow +0} \ln \phi \right) + \ln \left(\frac{k - i}{k - i + 1} \right) \\ = +\infty \end{aligned}$$

$v_i < v_{i+1}$ ($\phi \rightarrow 0$) であるから, この不等式と式 (III.20) により, 次式が示される:

$$v_0 < v_1 < v_2 < \cdots < v_k, \quad (\phi \rightarrow +0).$$

(6) 補題 6 の証明

あるサステインポイント ϕ_s を考え, (ϕ_s, σ, μ) では $v_i = v_0$ とする. $g(\phi, \sigma, \mu) \equiv v_i - v_0$ と定義すると, 式 (III.1), (III.2) により $g(\phi, \sigma, \mu)$ は次式で与えられる:

$$g(\phi, \sigma, \mu) = \frac{i\mu}{\sigma - 1} \ln \phi + \ln X - \ln(2k + 1).$$

ここで,

$$\begin{aligned} X &= (\theta k + k + 1) \phi^i \\ &+ (1 - \theta) \left[(k - i) \phi^{-i} + \sum_{p=1}^i \phi^{i-2p} \right] > 0. \end{aligned}$$

サステインポイントでは $g(\phi_s, \sigma, \mu) = 0$ である. また, σ, μ の微小変化により ϕ_s も微小変化すると仮定し, $g(\phi_s + \phi_s, \sigma + \sigma, \mu + \mu) = 0$ とする. このとき, $g(\phi_s, \sigma, \mu)$ の全微分は次式で与えられる:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial \phi} d\phi + \frac{\partial g}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial g}{\partial \mu} d\mu = 0. \quad (\text{III.23})$$

ここで, $g(\phi_s, \sigma, \mu)$ の偏微分は次で与えられる:

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} = \frac{i\mu}{\phi(\sigma-1)} + \frac{Y}{X}, \quad (\text{III.24})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} = -\frac{i\mu}{(\sigma-1)^2} \ln \phi + \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial \sigma}, \quad (\text{III.25})$$

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} = \frac{i}{\sigma-1} \ln \phi + \frac{1}{X} \frac{\partial X}{\partial \mu}. \quad (\text{III.26})$$

ここで,

$$Y = (\theta k + k + 1)i\phi^i + (1 - \theta) \left[(i - k)i\phi^{i-1} + \sum_{p=1}^i (i - 2p)\phi^{i-2p-1} \right],$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = -\frac{1}{\sigma^2} E, \quad (\text{III.27})$$

$$\frac{\partial X}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} E, \quad (\text{III.28})$$

$$E = k\phi^i - (k - i)\phi^{i-1} - \sum_{p=1}^i \phi^{i-2p}. \quad (\text{III.29})$$

まず, μ は一定 ($d\mu = 0$) として, $dg/d\sigma$ の符号を調べる. $d\mu = 0$ であるとき, 式 (III.23) は次式で与えられる:

$$\frac{d\phi_s}{d\sigma} = -\frac{\partial g}{\partial \sigma} / \frac{\partial g}{\partial \phi_s}. \quad (\text{III.30})$$

第一に, $\partial g / \partial \phi$ の符号を調べる. 式 (III.24) から, 直接 $\partial g / \partial \phi$ の符号を確定することは困難なので, 微分の定義式を利用する. サステインポイントの定義から,

$$g(\phi_s + d\phi_s, \sigma, \mu) < 0, \quad 0 < d\phi_s \ll 1 \quad (\text{III.31})$$

である. したがって,

$$\lim_{d\phi_s \rightarrow +0} \frac{g(\phi_s + d\phi_s, \sigma, \mu) - g(\phi_s, \sigma, \mu)}{d\phi_s} < 0 \quad (\text{III.32})$$

である. ここで, g は C^1 級であるので, 右極限から導出した偏微分係数 (III.32) と左極限から導出した偏微分係数は一致する. ゆえに,

$$\frac{\partial g}{\partial \phi} \Big|_{\phi=\phi_s} = \lim_{d\phi_s \rightarrow +0} \frac{g(\phi_s + d\phi_s, \sigma, \mu) - g(\phi_s, \sigma, \mu)}{d\phi_s} < 0.$$

第二に, $\partial g / \partial \sigma$ の符号を調べる. $0 < \phi_s < 1$ により, 式 (III.29) において

$$E = k\phi_s^i - (k - i)\phi_s^{i-1} - \sum_{p=1}^i \phi_s^{i-2p} < k\phi_s^i - (k - i)\phi_s^{i-1} - \sum_{p=1}^i \phi_s^i = 0$$

であるので, $\partial X / \partial \sigma > 0$ である. したがって,

$$\frac{\partial g}{\partial \sigma} \Big|_{\phi=\phi_s} > 0.$$

以上をまとめると, $d\mu = 0$ であるとき, 式 (III.30) から

$$\frac{d\phi_s}{d\sigma} > 0.$$

次に, σ は一定 ($d\sigma = 0$) として, $dg/d\mu$ の符号を調べる. $d\sigma = 0$ であるとき, 式 (III.23) は次式で与えられる:

$$\frac{d\phi_s}{d\mu} = -\frac{\partial g}{\partial \mu} / \frac{\partial g}{\partial \phi_s}. \quad (\text{III.33})$$

$\partial g / \partial \phi_s$ の符号は既に明らかなので, $\partial g / \partial \mu$ の符号だけを調べればよい. ただし, $E < 0$ であることが明らかとなっているので,

$$\frac{\partial X}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} E < 0. \quad (\text{III.34})$$

したがって,

$$\frac{\partial g}{\partial \mu} \Big|_{\phi=\phi_s} < 0.$$

まとめると, 式 (III.30) から, $d\sigma = 0$ であるとき,

$$\frac{d\phi_s}{d\mu} < 0.$$

参考文献

- 1) Forslid, R. and Ottaviano, G. I. P.: An analytically solvable core-periphery model, *Journal of Economic Geography*, Vol.3, pp.229-240, 2003.
- 2) 久武昌人, 山崎清: 独占的競争等を取り入れた他地域 CGE モデルの構築, *RITEI Discussion Paper Series*, No.06-J-046, 2006.
- 3) 佐藤徹治, 樋野誠一, 稲垣雅一: 産業連関を考慮した他地域計量経済モデルと NEG 型応用一般均衡モデルの実証比較, *土木計画学研究・論文集*, Vol.25, No.1, pp.59-66, 2008.
- 4) 石倉智樹: 人口減少に伴う都市の縮退と集積に関する基礎的定量分析, *都市計画学論文集*, Vol.47, No.7, pp.68-73, 2012.
- 5) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹: 新経済地理学に基づく空間応用一般均衡モデルの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.70, No.4, pp.245-258, 2014.
- 6) 高山雄貴, 赤松隆, 石倉智樹: 生産要素の地域間移動・集積の経済を考慮した空間応用一般均衡モデルの開発, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.72, No.2, pp.211-230, 2016.
- 7) 高山雄貴, 梶大介, 服部佑哉, 今川奈保, 石倉智樹: 集積の経済と労働者の地域間移動を考慮した空間応用一般均衡分析, *土木学会論文集 D3 (土木計画学)*, Vol.74, No.1, pp.82-100, 2018.
- 8) Bröcker, J.: How would an EU-membership of the Visegrád-countries affect Europe's economic geography?, *The Annals of Regional Science*, Vol.32, No.1, pp.91-114, 1998.
- 9) Krugman, P.: Increasing returns and economic geography, *Journal of Political Economy*, Vol.99, pp.483-499, 1991.
- 10) Dixit, A. and Stiglitz, J.: Monopolistic competition and optimum product diversity, *American Economic Review*, Vol.67, pp.297-308, 1977.
- 11) Fujita, M. and Mori, T.: Frontiers of the New Economic Geography, *Regional Science*, Vol.84(3), pp.377-405, 2012.
- 12) Tabuchi, T. and Thisse, J.-F.: A new economic geography model of central places, *Journal of Urban Economics*, Vol.69, pp.240-252, 2011.
- 13) Akamatsu, T., Takayama, Y. and Ikeda, K.: Spatial discounting, Fourier, and racetrack economy: A

- recipe for the analysis of spatial agglomeration models, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.36, pp.1729-1759, 2012.
- 14) Akamatsu, T., Mori, T., Osawa, M. and Takayama, Y.: Endogenous agglomeration in a many-region world, *arXiv preprint arXiv:1912.05113*, 2019.
 - 15) Ikeda, K., Akamatsu, T. and Kono, T.: Spatial period-doubling agglomeration of a core-periphery model with a system of cities, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.36, pp.754-778, 2012.
 - 16) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y.: Spatial period doubling, invariant pattern, and break point in economic agglomeration in two dimension, *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol.92, pp.129-152, 2018.
 - 17) Ikeda, K., Onda, M. and Takayama, Y.: Bifurcation theory of a racetrack economy in a spatial economy model, *Networks and Spatial Economics*, Vol.19, pp.57-82, 2019.
 - 18) Matsuyama, K.: Geographical advantage: Home market effect in a multi-region world, *Research in Economics*, Vol.71, pp.740-758, 2017.
 - 19) 大澤実: 集積経済モデルの数理解析とその周辺, 土木学会論文集 D3 (土木計画学), Vol.74, No.5, pp.I.19-I.36, 2018.
 - 20) Taylor, P. D. and Jonker, L. B.: Evolutionarily stable strategies and game dynamics, *Mathematical Biosciences*, Vol.40, pp.145-156, 1978.
 - 21) Mori, T.: A modeling of megalopolis formation: The maturing of city systems, *Journal of Urban Economics*, Vol.42, pp.133-157, 1997.
 - 22) Fujita, M. and Mori, T.: Structural stability and the evolution of urban systems, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.42, pp.399-442, 1997.
 - 23) Christaller, W.: *Die zentralen Orte in Süddeutschland*, Gustav Fischer, Jena, 1933. English translation: *Central Places in Southern Germany*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1966.
 - 24) Lösch, A.: *Die räumliche Ordnung der Wirtschaft*, Gustav Fischer, Jena, 1940. English translation: *The Economics of Location*, Yale University Press, 1954.
 - 25) Fujita, M., Krugman, P. and Mori, T.: On the evolution of hierarchical urban systems, *European Economic Review*, Vol.43(2), pp.209-251, 1999.
 - 26) Ikeda, K., Murota, K., Akamatsu T. and Takayama, Y.: Agglomeration patterns in a long narrow economy of a new economic geography model: Analogy to a racetrack economy, *International Journal of Economic Theory*, Vol.13, pp.113-145, 2017.
 - 27) Fujita, M., Krugman, P. and Venables, A. J.: *The Spatial Economy: Cities, Regions and International Trade*, MIT Press, 1999.
 - 28) Sandholm, W. H.: *Population Games and Evolutionary Dynamics*, MIT Press, 2010.
 - 29) Ikeda, K. and Murota, K.: *Imperfect Bifurcation in Structures and Materials*, 3rd ed., Springer-Verlag, 2019.
 - 30) Mossay, P.: A theory of rational spatial agglomerations, *Regional Science and Urban Economics*, Vol.43, pp.385-394, 2013.

(Received December 18, 2019)

(Accepted July 17, 2020)

BIFURCATION ANALYSIS OF MONOCENTRIC AGGLOMERATION ON A LONG NARROW ECONOMY

Hiroki AIZAWA, Kiyohiro IKEDA, Yosuke KOGURE, Minoru OSAWA
and José Maria GASPAR

In new economic geography, economic agglomeration is known to be governed by bifurcation. However, the majority of theoretical researches focuses on two-place economy and racetrack economy and abstract from geographical advantage which are pervasive in the real world. In this paper, we focus on a long narrow economy, in which discrete locations are equally spread over a line segment. By group-theoretic bifurcation theory, we elucidate the bifurcation mechanism of monocentric city on this economy analytically. Emergence of satellite cities around a primary city is shown to exist. By numerical analysis of Forslid & Ottaviano model with replicator dynamics, we show that the higher the expenditure share of manufactured goods is or the lower the elasticity of substitution is, the farther from the monocentric city satellite cities emerge.